الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) **المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية"** **المادة: رياضيات**	**فرض** **الفصل الثاني**	**الموسم الدراسي: 2023/2022** **المدة: ساعتان ونصف** **إعداد: عبد المطلب** مدرسة "الرجاء والتفوق" الخاصة Ecole Erradja wa Tafaouk ÉCOLE PRIVÉE

تمرين1 (04نقاط)

I و J العددان الحقيقيان المعرّفان كما يلي: $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx$ و $J=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{x}}{e^{2x}-1}dx$.

1) بيّن أنّ $I=\frac{1}{2}(3\ln 2-\ln 3)$.

2) احسب $I-J$، واستنتج حساب J.

3) n عدد طبيعي أكبر تماما من 1، و K_n العدد الحقيقي المعرّف بـ: $K_n=\int_{\ln n}^{\ln(n+1)}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)\,dx$.

أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب K_2.

ب) احسب بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n=K_2+K_3+...+K_n$. (حساب K_n غير مطلوب)

تمرين2 (07نقاط)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0=\alpha+2$ و $u_{n+1}=\frac{(\alpha+2)u_n}{u_n+2-\alpha}$. ($\alpha$ عدد حقيقي يختلف عن 2-)

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة بـ: $v_n=\frac{u_n}{u_n-2\alpha}$.

I- في هذا الجزء من التمرين نفرض أنّ: $\alpha=1$.

1) تحقّق أنّ: $u_{n+1}=3-\frac{3}{u_n+1}$، ثم برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $2<u_n<4$.

2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنّها متقاربة.

3) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=\frac{6}{3-3^{-n}}$، واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

4) اكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم عيّن أصغر عدد طبيعي n يحقّق $v_n\geq e^{66}$.

5) احسب بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{1}{u_0}+\frac{1}{u_1}+...+\frac{1}{u_n}$.

II- نفرض في هذا الجزء أنّ: $-2<\alpha<0$.

1) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2+\alpha}{2-\alpha}$، ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n و α.

2) بيّن أنّ $0<\frac{2+\alpha}{2-\alpha}<1$، ثم استنتج اتّجاه تغيّر المتتالية (v_n) واحسب نهايتها.

3) لكل عدد طبيعي n غير معدوم، نضع: $S'_n=\ln\left((2-\alpha)v_0\right)+\ln\left((2-\alpha)^2v_1\right)+...+\ln\left((2-\alpha)^nv_{n-1}\right)$.

احسب بدلالة n و α، المجموع S'_n.

تمرين3 (09نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ: $g(x)=-e^x(e^x+2x)$.

1) احسب $g(0)$، و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) احسب $g'(x)$، ثم بيّن أنّ $g'(x)<0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,;+\infty[$.

3) شكّل جدول تغيرات الدالة g، واستنتج أنّ $g(x)+1\leq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0\,;+\infty[$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1-e^x}{1+e^x}\right)$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(-x)=f(x)$. ماذا تستنتج؟ فسّر ذلك بيانيا.

2) أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$، و أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\dfrac{x}{2}\right)=0$.

ب) ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-\dfrac{x}{2}$. ماذا يمثل (Δ)؟

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x موجب، $f'(x)=\dfrac{1+g(x)}{2(1+e^x)^2}$.

ب) بيّن أنّ f متناقصة تماما على $]0\,;+\infty[$. استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

4) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=-1$ تقبل حلين α و β حيث $2{,}3<\alpha<2{,}4$. استنتج حصرا للعدد β.

ب) اكتب معادلة للمستقيم (Δ') المقارب المائل لـ$(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$، ثم ارسم (Δ)، (Δ') و $(\mathscr{C})$.

III- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)+\dfrac{u_n}{2}$.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$.

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، المتتالية (u_n) متناقصة. استنتج أنّها متقاربة.

3) أ) بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي k من المجال $]0;1[$، حيث من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}\leq k\,u_n$.

ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n).

تصحيح الفرض للفصل الثاني 2023م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

$$I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx=\frac{1}{2}\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln(e^{2x}-1)\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$ (1

$$I=\frac{1}{2}(\ln 8-\ln 3)=\frac{1}{2}(3\ln 2-\ln 3)=\ln\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$I-J=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-1}dx=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{x}(e^{x}-1)}{(e^{x}+1)(e^{x}-1)}dx$$ (2

$$I-J=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}dx=\left[\ln(e^{x}+1)\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I-J=\ln 4-\ln 3=\ln\frac{4}{3}$$

ومنه: $J=I-\ln\frac{4}{3}$ $\quad J=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

$$K_2=\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)dx$$ (3 (P

$$\begin{cases}u'(x)=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}\\ V(x)=-e^{-x}\end{cases}\quad\nearrow\swarrow\quad\begin{cases}u(x)=\ln(e^{2x}-1)\\ V'(x)=e^{-x}\end{cases}$$

$$K_2=\left[-e^{-x}\ln(e^{2x}-1)\right]_{\ln 2}^{\ln 3}+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{2e^{x}}{e^{2x}-1}dx$$

$$K_2=\frac{-\ln 8}{3}+\frac{\ln 3}{2}+2J=\frac{1}{2}(3\ln 3-4\ln 2)=\ln\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

ب) $S_n=\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)dx+\int_{\ln 3}^{\ln 4}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)dx+\dots+\int_{\ln n}^{\ln(n+1)}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)dx$

حيث: $S_n=\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}e^{-x}\ln(e^{2x}-1)dx$

نضع: $J_n=\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\frac{e^{x}}{e^{2x}-1}dx$ و $I_n=\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}dx$

$$I_n-J_n=\int_{\ln 2}^{\ln(n+1)}\frac{e^{x}}{e^{x}+1}dx=\left[\ln(e^{x}+1)\right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$$

$$J_n=\left[\frac{1}{2}\ln(e^{2x}-1)-\ln(e^{x}+1)\right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$$

$$J_n=\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)\right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$$

لحساب S_n نستعمل الكاملة بالتجزئة:

$$S_n=\left[-e^{-x}\ln(e^{2x}-1)\right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}+2J_n$$

$$S_n=\left[-e^{-x}\ln(e^{2x}-1)+\ln\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)\right]_{\ln 2}^{\ln(n+1)}$$

$$S_n=-\frac{\ln(n^2+2n)}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+2}\right)+\frac{3}{2}\ln 3$$

تمرين 2:

$$U_{n+1}=\frac{3U_n}{U_n+1}\quad\text{و}\quad V_n=\frac{U_n}{U_n-2}$$ — I

(1 $U_{n+1}=\frac{3U_n+3-3}{U_n+1}=3-\frac{3}{U_n+1}$

$n=0$: $U_0=3$ ، $2<U_0<4$ (محققة)

نفرض أن $2<U_n<4$ من أجل n كيفي، ونبرهن صحتها من أجل $n+1$، أي $2<U_{n+1}<4$.

$2<U_n<4$ ؛ $3<U_n+1<5$ ؛ $\frac{1}{5}<\frac{1}{U_n+1}<\frac{1}{3}$

$2<3-\frac{3}{U_n+1}<\frac{12}{5}<4$ ؛ $-1<\frac{-3}{U_n+1}<-\frac{3}{5}$

ومنه من أجل $n\in\mathbb{N}$ لدينا $2<U_n<4$ ، ومنه من أجل $2<U_{n+1}<4$

(2 $U_{n+1}-U_n=\frac{3U_n}{U_n+1}-U_n=\frac{-U_n^2+2U_n}{U_n+1}$

$$U_{n+1}-U_n=\frac{U_n(2-U_n)}{U_n+1}<0$$

لأن $U_n>0$ و $2-U_n<0$، ومنه (U_n) متناقصة

(U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

(3 $n=0$: $U_0=3$ (محققة) $\left(U_0=\frac{6}{3-1}=3\right)$

نفرض صحة U_n من أجل n كيفي ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي: $U_{n+1}=\frac{6}{3-3^{-n-1}}$.

$$U_{n+1}=\frac{3U_n}{U_n+1}=\frac{3\left(\frac{6}{3-3^{-n}}\right)}{\frac{6}{3-3^{-n}}+1}=$$

$$\frac{3\times 6}{9-3^{-n}}=\frac{3\times 6}{3\left(3-\frac{3^{-n}}{3}\right)}=\frac{6}{3-3^{-n-1}}$$ (محققة)

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ U_n محققة.

$\lim_{n\to+\infty}U_n=\frac{6}{3}=2$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

(4 $V_n=\frac{U_n}{U_n-2}=\frac{\frac{6}{3-3^{-n}}}{\frac{6}{3-3^{-n}}-2}=\frac{6}{2\times 3^{-n}}$

$$V_n=\frac{3}{3^{-n}}=3^{n+1}$$

$3^{n+1}\geq e^{66}$ ، $\ln 3^{n+1}\geq\ln e^{66}$ ، $V_n\geq e^{66}$

$(n+1)\ln 3\geq 66$ ؛ $n+1\geq\frac{66}{\ln 3}$ ؛ $n\geq 59{,}07$ ومنه:

$n=60$

(5 $S_n=\frac{1}{U_0}+\frac{1}{U_1}+\dots+\frac{1}{U_n}$

$$S_n=\frac{3-3^{0}}{6}+\frac{3-3^{-1}}{6}+\dots+\frac{3-3^{-n}}{6}$$

$$S_n=\frac{3+3+\dots+3-(3^{0}+3^{-1}+3^{-2}+\dots+3^{-n})}{6}$$

مجموع حدود متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول 1

$$S_n=\frac{3(n+1)-\left(\frac{1-3^{-n-1}}{1-3^{-1}}\right)}{6}=\frac{3(n+1)-\frac{3}{2}(1-3^{-n-1})}{6}$$

$$S_n=\frac{2n+1+3^{-n-1}}{4}$$

II (1

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}}{U_{n+1}-2\alpha}=\frac{\frac{(\alpha+2)U_n}{U_n+2-\alpha}}{\frac{(\alpha+2)U_n}{U_n+2-\alpha}-2\alpha}$$

$V_{n+1} = \frac{(\alpha+2)U_n}{(2-\alpha)U_n - 2\alpha(2-\alpha)} = \frac{\alpha+2}{2-\alpha}\left(\frac{U_n}{U_n - 2\alpha}\right)$

$q = \frac{2+\alpha}{2-\alpha}$ متتالية هندسية (V_n) ومنه $V_{n+1} = \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)V_n$

$V_n = V_0 q^n = \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^n = \left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^{n+1}$

$2 < 2-\alpha < 4$ ؛ $0 < -\alpha < 2$ ؛ $-2 < \alpha < 0$ (2

ومنه : $0 < 2+\alpha < 2$ ؛ $\frac{1}{4} < \frac{1}{2-\alpha} < \frac{1}{2}$

$0 < \frac{2+\alpha}{2-\alpha} < 1$ ؛ $0 < q < 1$ ؛ $V_0 > 0$ فهي متتالية متناقصة

$\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$

$S'_n = \ln(2-\alpha)\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right) + \ln(2-\alpha)^2\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^2 + \dots$ (3

$+ \ln(2-\alpha)^n\left(\frac{2+\alpha}{2-\alpha}\right)^n$

$S'_n = \ln(2+\alpha) + \ln(2+\alpha)^2 + \dots + \ln(2+\alpha)^n$

$S'_n = \ln(2+\alpha) + 2\ln(2+\alpha) + \dots + n\ln(2+\alpha)$.

$S'_n = (1+2+\dots+n)\ln(2+\alpha) = \frac{n(n+1)}{2}\ln(2+\alpha)$

تمرين 3 :

I - 1) $g(0) = -1$ ؛ $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

2) $g'(x) = -\left(e^x(e^x+2x) + e^x(e^x+2)\right)$

$= -2e^x(x+1+e^x) < 0$ لأن $x \geq 0$.

3) لما $g(x) \leq -1$ حظ أنّ $g(x)+1 \leq 0$ ومنه : من أجل كل $x \in [0;+\infty[$

x	0	$+\infty$
g'	$-$	
$g(x)$	-1	$\searrow -\infty$

II - 1) من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$.

$f(-x) = \frac{-x}{2}\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) = \frac{-x}{2}\left(\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)\frac{e^x}{e^x}$

$f(-x) = \frac{-x}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) = f(x)$

ومنه f زوجية . $(\mathcal{C})$ متناظر بالنسبة لـ $(y'Oy)$.

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2}\left[\frac{e^x(\frac{1}{e^x}-1)}{e^x(\frac{1}{e^x}+1)}\right] = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}+1\right)$

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2}\left(\frac{2}{1+e^x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}\right)$

$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{x}{2}\right) = 0$ ومنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$

ب) ندرس إشارة : $\left(f(x)+\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{e^x+1}$ ومنه :

$(\mathcal{C})$ أعلى (Δ) : $x > 0$ ؛ $(\mathcal{C})$ أسفل (Δ) : $x < 0$

$(\mathcal{C})$ يقطع (Δ) عند المبدأ $O(0;0)$.

(Δ) يمثل المستقيم المقارب المائل لـ $(\mathcal{C})$ بجوار $+\infty$.

3) $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right) + \frac{x}{2}\left(\frac{-e^x(e^x+1)-e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^2}\right)$

$f'(x) = \frac{(1-e^x)(1+e^x)+x(-2e^x)}{2(1+e^x)^2} = \frac{1-e^{2x}-2xe^x}{2(1+e^x)^2}$

$f'(x) = \frac{1+g(x)}{2(1+e^x)^2}$

ب) f متناقصة تماما على $[0;+\infty[$ ومنه $1+g(x) \leq 0$

f زوجية فهي متزايدة تماما على $]-\infty;0]$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\searrow -\infty$

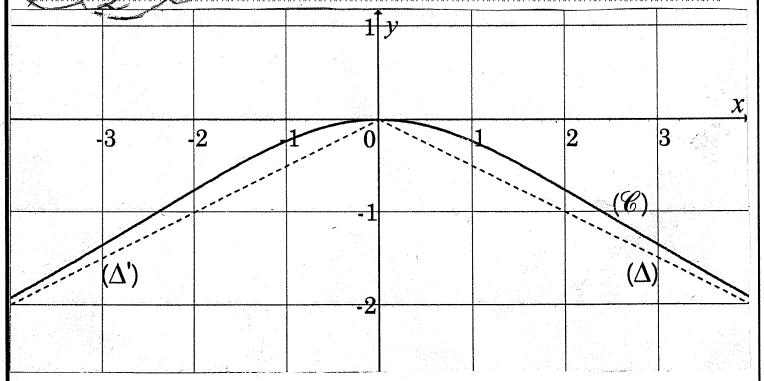
4) f مستمرة ومتناقصة على $[2,3;2,4]$ (P

$f(2,4) \approx -1,0004 < -1$ ؛ $f(2,3) = -0,94 > -1$ ومنه :

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن : $f(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا α على $[2,3;2,4]$ حيث $f(\alpha) = -1$.

ومنه : $-2,4 < \beta < -2,3$ ؛ $f(-x) = f(x)$

ب) f زوجية : ومنه $f(-x) = f(x)$ ؛ $(\Delta') : y = \frac{x}{2}$



III - 1) $n = 0$: $U_0 = 1$ ، $U_0 > 0$ (محققة)

نفرض أن $U_n > 0$ من أجل كل عدد n كيفي ،

ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $U_{n+1} > 0$.

مما سبق لما $x > 0$ ، $\left(f(x)+\frac{x}{2}\right) > 0$ ومنه :

$U_{n+1} = \left(f(U_n)+\frac{U_n}{2}\right) > 0$. إذن $U_n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

2) $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - \frac{U_n}{2} = \frac{-U_n e^{U_n}}{e^{U_n}+1} < 0$

ومنه (U_n) متناقصة .

3) (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة .

لدينا : $U_{n+1} = f(U_n) + \frac{U_n}{2} = \frac{U_n}{e^{U_n}+1}$ (P

$U_n > 0$ ؛ $e^{U_n} > 1$ ؛ $e^{U_n}+1 > 2$

عند ضرب طرفي المتباينة بـ U_n : $\frac{1}{e^{U_n}+1} < \frac{1}{2}$

ومنه : $\frac{U_n}{e^{U_n}+1} < \frac{U_n}{2}$ ؛ $U_{n+1} < \frac{1}{2}U_n$

إذن : $k = \frac{1}{2}$

ب) $n = 0$: $U_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$ ، $U_0 \leq 1$ محققة .

نفرض أن $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ من أجل n كيفي ونبرهن

صحتها من أجل $(n+1)$ أي $U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

لدينا : $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ؛ $\frac{1}{2}U_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (نضرب بـ $\frac{1}{2}$)

ولدينا سابقا $U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$ ؛ $U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

ومنه $U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. إذن $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

ولدينا $0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ؛ $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$