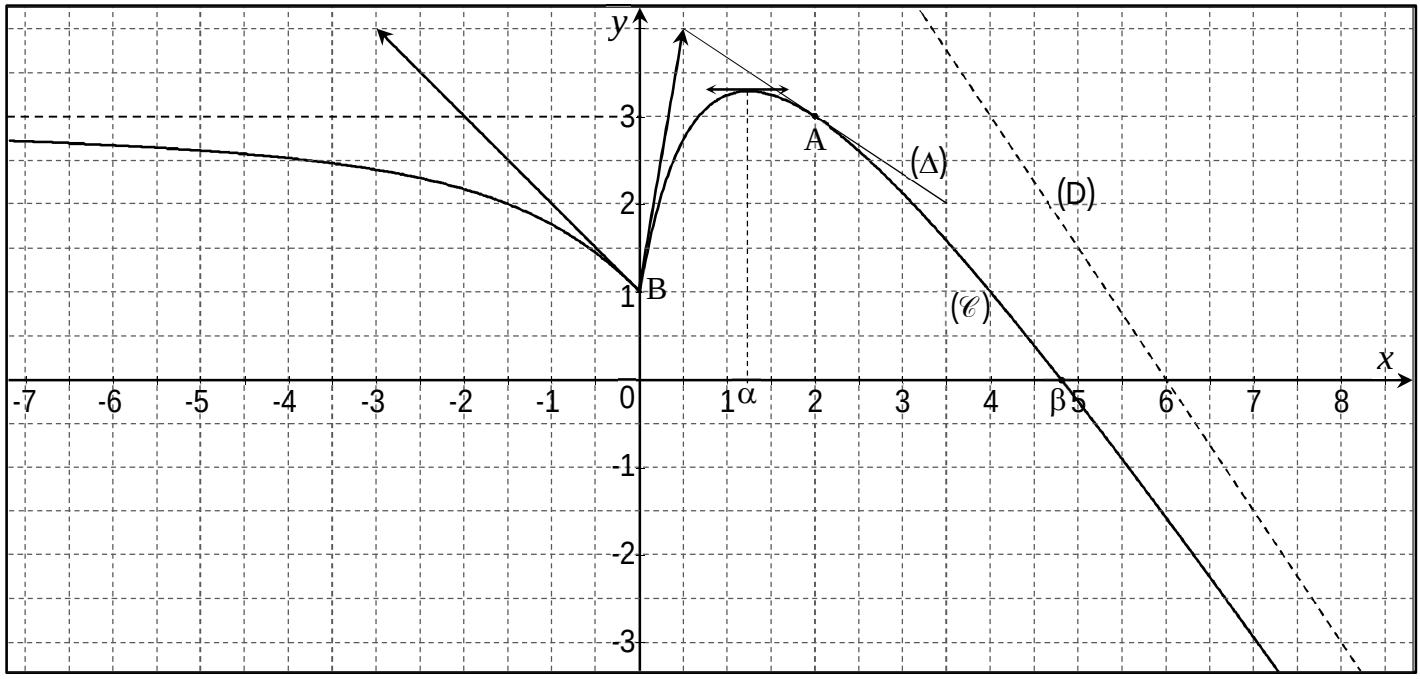
الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" المادة: رياضيات	**فرض** **الفصل الأول**	الموسم الدراسي: 2022/2023م المدة: ساعتان (2سا) إعداد: عبد المطلب مدرسة "الرجاء والتفوق" الخاصة Ecole Erradja wa Tafaouk ÉCOLE PRIVÉE

تمرين1 (10نقاط)

في الشّكل المرفق: التمثيل البياني $(\mathscr{C})$ للدالة f المعرّفة والمستمرة على $\mathbb{R}$. (D) المستقيم المقارب المائل لـ$(\mathscr{C})$ في جوار $+\infty$، والمستقيم الذي معادلته $y=3$ مقارب لـ$(\mathscr{C})$ في جوار $-\infty$ ، (Δ) هو المماس لـ$(\mathscr{C})$ عند النقطة $A(2\,;3)$ ، كما يوجد نصفي مماسين عند النقطة $B(0\,;1)$ ، ومماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α.



1) اكتب معادلة المستقيم المقارب المائل (D)، ومعادلة المماس (Δ).

2) عيّن النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{f(x)+1}}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\dfrac{3}{2}x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)$.

3) عيّن النهايات التالية: $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0} \dfrac{f(x)-1}{x}$ ، $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} \dfrac{f(x)-1}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{f(-x+4)-3}{x-2}$.

4) بيّن أنّ الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند النقطة B. ماذا نسمي النقطة B ؟

5) أدرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

6) عيّن القيمة المقرّبة للعدد $f(2{,}001)$ ، باستعمال التقريب التآلفي للدالة f .

7) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β يطلب إعطاء حصرا له سعته $0{,}5$ ، ثم ادرس إشارة $f(x)$.

8) عيّن قيم الوسيط الحقيقي m ، حتى تقبل المعادلة $f(x)=m+1$ ثلاثة حلول متمايزة.

9) g الدالة العددية المعرّفة بـ: $g(x)=ax+b-\sqrt{x^2+c}$ ، حيث a ، b و c ثلاثة أعداد حقيقية.

أ) عيّن قيم العدد الحقيقي c حتى تكون الدالة g معرّفة على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ، من أجل كل حالة مما يلي: $a<0$ ، $a=1$ و $a>1$.

ج) إذا علمت أنّ $f(x)=g(x)$ على المجال $]-\infty\,;0]$ ، وبالاستعانة بقيم $f(0)$ ، $f'_g(0)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، عيّن الأعداد الحقيقية a ، b و c.

اقلب الورقة

تمرين2 (10نقاط)

I- g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ: $g(x)=a+\dfrac{b}{x^2-2x-3}$ ، حيث a و b عددين حقيقيين.

1) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ ، فإنّ: $g'(x)=\dfrac{-2b(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$.

2) عيّن العددين الحقيقيين a و b، بحيث المنحني الممثل للدالة g في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ يقبل عند النقطة $A(5;-4)$ مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $2x-3y+1=0$.

II- f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{-3x^2+6x-3}{x^2-2x-3}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول 1cm)

1) احسب النهايات عند حدود مجالات تعريف الدالة f.

2) اكتب معادلة لكل من المستقيمات المقاربة للمنحني $(\mathscr{C})$.

3) بيّن أنّ: من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;3\}$، $f'(x)=\dfrac{24x-24}{(x^2-2x-3)^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

4) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم $(\mathscr{D})$ الذي معادلته $y=1$ ، مع تحديد نقاط تقاطعهما.

5) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0=-3$.

6) أثبت أنّ المستقيم ذي المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحني $(\mathscr{C})$.

7) احسب $f(-2)$ و $f(0)$ ، ثم ارسم المستقيمات المقاربة، المماس (Δ) والمنحني $(\mathscr{C})$.

8) m وسيط حقيقي. استعمل $(\mathscr{C})$ لتعيين عدد وإشارة حلول المعادلة $(m+3)x^2-2(m+3)x-3(m-1)=0$.

III- h الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ: $h(x)=\dfrac{6x-3}{x^2-2x-3}$.

ليكن $(\mathscr{C}')$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ الدالة h متناقصة تماما على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$.

2) بيّن أنّه يوجد مماسا مشتركا بين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ يطلب تعيين معادلة له.

بالتّوفيق

تصحيح فرض الفصل الأول 2022م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

1) $(D): y=ax+b$ يشمل $C(6;0)$ و $D(4;3)$

بمعنى: $0=6a+b$ و $3=4a+b$

ومنه: $(D): y=-\frac{3}{2}x+9$

$(\Delta): y=ax+b$ يشمل $A(2;3)$ و $E(\frac{1}{2};4)$

بمعنى: $3=2a+b$ و $4=0{,}5a+b$

ومنه: $(\Delta): y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{f(x)+1}}=\frac{1}{\sqrt{3+1}}=\frac{1}{2}$$

بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{3}{2}x-9\right)=0$ فإن (D) مستقيم مقارب مائل، إذن:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{3}{2}x\right)=9$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x\right)=9-\frac{1}{2}\lim_{+\infty}x=-\infty$$

3) $$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=f'_g(0)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-1}{-3-0}=-1$$

(معامل توجيه نصف المماس عند 0 من اليسار)

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=f'_d(0)=\frac{4-1}{0{,}5-0}=6$$

(معامل توجيه نصف المماس عند 0 من اليمين)

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=0$$

(المماس يوازي حامل محور الفواصل)

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ نضع: $h(x)=f(-x+4)$

$h(2)=f(2)=3$ و $h'(x)=-f'(-x+4)$

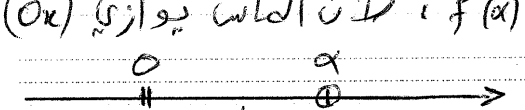
$$\lim_{x\to2}\frac{f(-x+4)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=h'(2)=\frac{2}{3}$$

4) $f'_g(0)\neq f'_d(0)$ ومنه f غير قابلة للاشتقاق عند 0. B تسمى نقطة زاوية.

5) إشارة $f'(x)$:

لدينا: $f'(\alpha)=0$، لأن المماس يوازي (Ox).

ومنه:



x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$		
$f(x)$	3 ↘	$\|\|$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$	

6) لما يكون x قريبا من 2:

$f(x)\simeq f'(2)(x-2)+f(2)\simeq-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$: (Δ)

$f(2{,}001)\simeq-\frac{2}{3}(2{,}001)+\frac{13}{3}\simeq2{,}999$

7) f مستمرة ومتناقصة تماما على $[4{,}5;5]$، و $f(5)<0$ و $f(4{,}5)>0$، منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β.

إشارة $f(x)$:

8) $1<m+1<3$ ومنه $0<m<2$

9) حتى تكون g معرفة على $\mathbb{R}$ يجب:

$D_g=\mathbb{R}$ $(c\geq0)$

ب) $a<0$: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

$a=1$:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+b-\sqrt{x^2+c}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+c})(x+\sqrt{x^2+c})}{x+\sqrt{x^2+c}}+b$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-c}{x+\sqrt{x^2+c}}+b\right)=b$$

$a>1$:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(ax+b-\sqrt{x^2+c}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\underbrace{\left(a-\sqrt{1+\frac{c}{x^2}}\right)}_{>0}+b\right]=+\infty$$

ج) $f'_g(0)=-1$ و $f'(x)=a-\frac{x}{\sqrt{x^2+c}}$

$a=-1$: ومنه

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+b-\sqrt{x^2+c}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(-\sqrt{x^2+c}-x)(-\sqrt{x^2+c}+x)}{-\sqrt{x^2+c}+x}+b\right)$$

$b=3$ ومنه: $=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{c}{-\sqrt{x^2+c}+x}+b\right)=3$

$f(0)=b-\sqrt{c}=1$

$c=4$: ومنه

$g(x)=-x+3+\sqrt{x^2+4}$

تمرين 2:

I- 1) $g'(x) = \frac{0-(2x-2)b}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{-2b(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$

2) $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ يعني $2x - 3y + 1 = 0$

$\begin{cases} a + \frac{b}{12} = -4 \\ \frac{-2b(4)}{12^2} = \frac{2}{3} \end{cases}$ يعني: $\begin{cases} g(5) = -4 \\ g'(5) = \frac{2}{3} \end{cases}$

نجد: $a = -3$ و $b = -12$

$g(x) = -3 - \frac{12}{x^2-2x-3}$

II- 1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$

$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim \frac{-3x^2+6x-3}{x^2-2x-3} = -\infty$ ($x^2-2x-3 \to 0^+$)

$\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{-3x^2+6x-3}{x^2-2x-3} = +\infty$ ($x^2-2x-3 \to 0^-$)

$\lim_{x\to3} f(x) = -\infty$

2) من النهايات، المستقيمات المقاربة:

$(x=-1)$ ، $(x=3)$ ، $(y=-3)$

3) $f'(x) = \frac{(-6x+6)(x^2-2x-3) - (2x-2)(-3x^2+6x-3)}{(x^2-2x-3)^2}$

$f'(x) = \frac{24(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	-3 ↘		$+\infty$ || $+\infty$ ↘		0	↗	$+\infty$ || $-\infty$ ↗		-3

4) ندرس إشارة $f(x) - y$:

$f(x) - y = \frac{-3x^2+6x-3}{x^2-2x-3} - 1 = \frac{-4x^2+8x}{x^2-2x-3}$

x	$-\infty$		-1		0		2		3		$+\infty$
$-4x^2+8x$	$-$		$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
x^2-2x-3	$+$		0	$-$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)-y$	$-$		$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

5) $(\mathcal{C})$ أعلى (D): $x \in]-\infty;-1[\cup]0;2[\cup]3;+\infty[$

$(\mathcal{C})$ أسفل (D): $x \in]-1;0[\cup]2;3[$.

(D) يقطع $(\mathcal{C})$ عند: $B(0,1)$ و $C(2,1)$.

5) $y = f'(-3)(x+3) + f(-3) = -\frac{2}{3}x - 6$

6) $x \in D_f$ فإن $(2-x) \in D_f$ و $f(2-x) = f(x)$

$x \neq -1$ ، $x \neq 3$ يكون $2-x \neq 3$

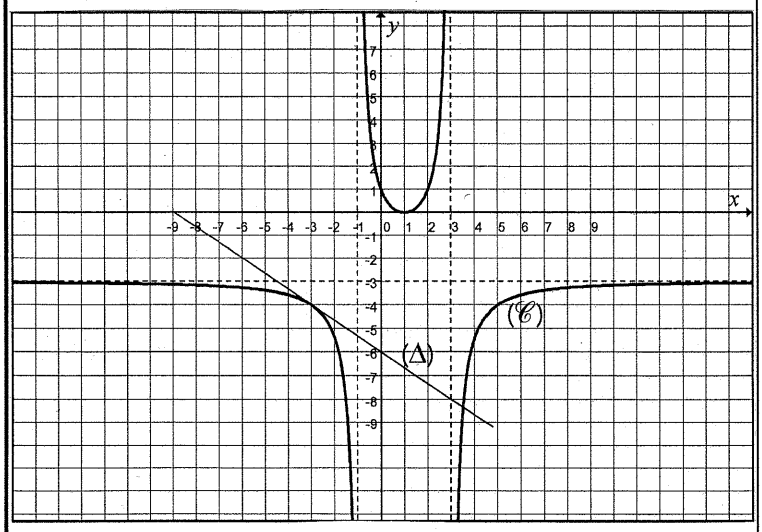
$x \neq -3$ ، $x \neq 1$ يكون $2-x \neq -1$

$x \in \mathbb{R}-\{-1;3\}$ فإن $2-x \in \mathbb{R}-\{-1;3\}$ لما $x \in \mathbb{R}-\{-1;3\}$ لدينا

$f(2-x) = \frac{-3(2-x)^2+6(2-x)-3}{(2-x)^2-2(2-x)-3} = \frac{-3x^2+6x-3}{x^2-2x-3}$

(C) محور تناظر (Δ) معادلته: $x = 1$ لدينا $f(2-x) = f(x)$

$f(-2) \simeq -5,4$ و $f(0) = 1$



8) $m(x^2-2x-3) = -3x^2+6x-3$

$m = \frac{-3x^2+6x-3}{x^2-2x-3} = f(x)$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع $(\mathcal{C})$ مع المستقيمات الأفقية: $y = m$.

$m \in]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[$: حلان مختلفان في الإشارة.

$m \in [-3;0[$: لا يوجد حلول.

$m \in]0;1[$: حلان موجبان تماما.

$m = 0$: حل مضاعف موجب $(x=1)$.

$m = 1$: حل معدوم و آخر موجب $(x=2)$.

III- 1) $h'(x) = \frac{-6x^2+6x-24}{(x^2-2x-3)^2}$: $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1;3\}$

$\Delta < 0$ و $a < 0$ لأن $h'(x) < 0$

ومنه h متناقصة تماما على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$

2) لدينا مماس مشترك يعني: $h'(x_0) = f'(x_0)$

و $h(x_0) = f(x_0)$

$\frac{-6x_0^2+6x_0-24}{(x_0^2-2x_0-3)^2} = \frac{24x_0-24}{(x_0^2-2x_0-3)^2}$

نجد: $6x_0^2+18x_0=0$ يعني: $x_0=0$ و $x_0=-3$

نجد $h(x_0) = f(x_0)$ " $x_0 = 0$

ومنه: $y = -\frac{8}{3}x + 1$

عبد المطلب "