



فيفري 2020

المستوى: الثالثة ثانوي رياضيات

المدة : 2 سا

فرض الثلاثي الثاني في الرياضيات

التمرين الأول (7 نقط)

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بحدها الأول  $u_0 = 1 - \frac{1}{e}$  و من اجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$u_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - u_n}$$

1- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 1$

2- بين انه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{1 - u_n + \sqrt{1 - u_n}}$

ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية و تفارها.

$(v_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  ب:  $v_n = \ln(1 - u_n)$

3- أن بين  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

4- اكتب  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

5- احسب  $P_n = (1 - u_0) \times (1 - u_1) \times \dots \times (1 - u_n)$

التمرين الثاني (8 نقطة)

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $f(x) = \ln\left(\frac{2e^{2x} + 1}{e^x}\right)$

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ثم بين أن:  $f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}}\right)$  ثم استنتج

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) ليكن  $(C_f)$  الممثل للدالة  $f$  في المتجانس و المتعامد المعلم إلى المنسوب المستوي حيث :  $||\vec{t}|| = 3$

بين أن المستقيم  $\Delta: y = x + \ln 2$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$

(4) بين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين تنتمي إلى  $(C_f)$

(5) ادرس الوضع النسبي ل  $(C_f)$  و المستقيمين المقاربين.

(6) أنشئ  $(C_f)$

## التمرين الثالث (5 نقطة)

1/ نعتبر في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلتين :  $(E) : 2081x - 2018y = 1$  ..... و  $(E') : 2081x - 2018y = 03$  .....

أ- بين أن العددين 2018 و 2081 أوليان فيما بينهما .

ب - باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة  $(E)$  ثم استنتج حلا خاصا للمعادلة  $(E')$  .

ج - حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة  $(E')$  .

2/ نرمز ب  $d$  إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين  $x$  و  $y$  .

أ - ماهي القيم الممكنة للعدد  $d$  ؟

ب - عين حلول المعادلة  $(E')$  حتى يكون  $d = 3$  .

3/  $A$  و  $B$  عددين طبيعيين يكتبان على الترتيب في نظام التعداد الذي أساسه 5 على الشكل :  $\overline{\alpha\beta 0\alpha\alpha}$  ؛  $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}$  .

أ - بين أنه إذا كان :  $B - A = 63$  فإن  $(*) : 19\alpha + 6\beta = 63$  .....

ب - بين أنه توجد ثنائية وحيدة  $(\alpha; \beta)$  من  $\mathbb{N}^2$  تحقق المعادلة  $(*)$  ثم استنتج كتابة العددين  $A$  و  $B$  في النظام العشري .

---

بالتوفيق

التعليم ليس استعدادا للحياة انه الحياة ذاتها

التصحيح النموذجي

| العلامة |   | الحل                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | رقم التمرين  |
|---------|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 7<br>ن  | 1 | <p>1- البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي <math>n: 0 &lt; u_n &lt; 1 \dots P(n)</math></p> <p>(ا) من اجل <math>n = 0: 0 &lt; u_0 &lt; 1</math> ومنه <math>P(0)</math> صحيحة</p> <p>(ب) نفرض صحة <math>0 &lt; u_n &lt; 1 \dots P(n)</math> و نبرهن صحة <math>P(n+1)</math></p> <p>لدينا <math>0 &lt; u_n &lt; 1</math></p> <p>ومنه <math>-1 &lt; \sqrt{1 - u_n} &lt; 0</math></p> <p>إذن <math>0 &lt; u_{n+1} &lt; 1</math></p> <p>ومنه <math>0 &lt; u_n &lt; 1</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | التمرين<br>1 |
|         | 1 | <p>2- نبين انه من اجل كل عدد طبيعي <math>n: u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{1 - u_n + \sqrt{1 - u_n}}</math></p> <p>لدينا</p> $u_{n+1} - u_n = 1 - \sqrt{1 - u_n} - u_n = \frac{(1 - u_n) - (\sqrt{1 - u_n})(1 - u_n) + (\sqrt{1 - u_n})}{(1 - u_n) + (\sqrt{1 - u_n})}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - u_n}{1 - u_n + \sqrt{1 - u_n}} = \frac{u_n(u_n - 1)}{1 - u_n + \sqrt{1 - u_n}}$ <p>لدينا <math>u_n &gt; 0; (u_n - 1) &lt; 0</math></p> $1 - u_n + \sqrt{1 - u_n} > 0$ <p>ومنه نستنتج أن المتتالية <math>(u_n)</math> متناقصة تماما</p> <p>3- تبين أن <math>(n)</math> هندسية</p> $v_{n+1} = \ln(1 - u_{n+1}) = \ln(1 - (1 - \sqrt{1 - u_n}))$ $= \ln(1 - u_n)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln(1 - u_n) = \frac{1}{2} v_n$ <p>ومنه <math>(v_n)</math> هندسية أساسها <math>\frac{1}{2}</math> الأول حدها و <math>v_0 = -1</math></p> <p>4- كتابة <math>u_n</math> و <math>v_n</math> بدلالة <math>n</math></p> |              |

|         |                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |           |           |                                             |           |         |   |   |   |              |
|---------|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-----------|---------------------------------------------|-----------|---------|---|---|---|--------------|
|         | 2<br>1                       | $; v_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ; u_n = 1 - e^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |           |           |                                             |           |         |   |   |   |              |
|         | 1                            | <p>5-حساب <math>P_n = (1 - u_0) \times (1 - u_1) \times \dots \times (1 - u_n)</math></p> $P_n = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |           |           |                                             |           |         |   |   |   |              |
| 8ن      | 0.5<br>1<br><br>1<br><br>1.5 | $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\ln 2 \quad (1)$ <p>(2) الإثبات أن</p> $f(x) = x + \ln 2 + \ln \left( \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-2x}}{1 + 2e^{-x}} \right)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ <p>اتجاه التغير: <math>f</math> دالة تقبل الاشتقاق على <math>\mathbb{R}</math></p> $f'(x) = \frac{e^x (2e^{2x} - 8e^x - 1)}{(e^x + 2)(2e^{2x} + 1)}$ $y_1 = \frac{-4 + 3\sqrt{2}}{2} \quad / \quad e^x = y; \Delta = 72$ $y_2 = \frac{-4 - 3\sqrt{2}}{2} \quad \text{مرفوض}$ $x_1 = \ln y_1 = \ln \left( \frac{-4 + 3\sqrt{2}}{2} \right) \approx -2,1$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>\ln \left( \frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \right)</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr> <tr> <td><math>f'(x)</math></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr> </table> | $x$       | $-\infty$ | $\ln \left( \frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \right)$ | $+\infty$ | $f'(x)$ | - | 0 | + | التمرين<br>2 |
| $x$     | $-\infty$                    | $\ln \left( \frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \right)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | $+\infty$ |           |                                             |           |         |   |   |   |              |
| $f'(x)$ | -                            | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | +         |           |                                             |           |         |   |   |   |              |

0.5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x + \ln 2)) / 3$$

المستقيم  $y = x + \ln 2$  :  $(\Delta)$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ .

0.5

4 / الإثبات أن نقطة تقاطع مقاربي المنحنى  $(C_f)$  تنتمي إلى  $(C_f)$  ولتكن هذه النقطة هي النقطة  $A(-2 \ln 2; -\ln 2)$  نبين أن:

$$f(-2 \ln 2) = -\ln 2$$

5 / دراسة الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  والمستقيم الذي معادلته:  $y = -\ln 2$

1

$$f(x) + \ln 2 = \ln \left( \frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \right) + \ln 2$$

$$= \ln \left( \frac{2e^{2x} + 1}{e^x + 2} \times 2 \right) = \ln \left( \frac{4e^{2x} + 2}{e^x + 2} \right)$$

$$\frac{4e^{2x} + 2}{e^x + 2} \geq 1; \text{ أي } \ln \left( \frac{4e^{2x} + 2}{e^x + 2} \right) \geq 0$$

ومنه:  $e^x(4e^x - 1) \geq 0$  أي  $e^x \geq \frac{1}{4}$

$x \geq -\ln 4$  ومنه من أجل كل  $x$  ;  $x \geq -\ln 4$  فإن  $(C_f)$  فوق المستقيم المقارب وتحت في المجال الآخر.

دراسة الوضع النسبي لـ  $(C_f)$  والمستقيم الذي معادلته  $(\Delta)$  :

1

$f$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty, x_1]$

ومتزايدة تماما على  $[x_1; +\infty[$

تابع للسؤال 2 / جدول التغيرات:

| $x$     | $-\infty$ | $x_1$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------|-----------|
| $f'(x)$ | -         | 0        | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(x_1)$ | $+\infty$ |



0.5

ج - حل في  $\mathbb{Z}^2$  المعادلة  $(E')$  :

$$2081(x-2979) = 2018(y-3072) \dots (*) \text{ ومنه } \begin{cases} 2081x - 2018y = 3 \\ 2081(2979) - 2018(3072) = 3 \end{cases}$$

$$2081/2018(y-3072) \text{ ومنه } 2081/2018(x-2979) \text{ وبما أن } \text{pgcd}(2081, 2018) = 1 \text{ فإنه حسب مبرهنة غوص}$$

$$y = 2081k + 3072 \text{ وعليه نجد } y - 3072 = 2081k \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ ومنه يوجد } 2081/(y-3072)$$

$$\text{وبالتعويض في المعادلة } (*) \text{ نجد } x = 2018k + 2979 \text{ ومنه } S = \left\{ (2018k + 2979, 2081k + 3072) / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

أ - القيم الممكنة للعدد  $d$  :

$$d \in \{1, 3\} \text{ ومنه } d/3 \text{ ومنه } d/2081x - 2018y \text{ ومنه } \begin{cases} d/2081x \\ d/2018y \end{cases} \text{ لدينا } \begin{cases} d/x \\ d/y \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d/2081x \\ d/2018y \end{cases}$$

0.5

ب - تعيين حلول المعادلة  $(E')$  حتى يكون  $d = 3$  :

0.5

$$\left\{ \begin{array}{l} k \equiv 0[3] \\ k \equiv 0[3] \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} 2018k \equiv 0[3] \\ 2081k \equiv 0[3] \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} 2018k + 2979 \equiv 0[3] \\ 2081k + 3072 \equiv 0[3] \end{array} \right\} \text{ تكافئ } \left\{ \begin{array}{l} x \equiv 0[3] \\ y \equiv 0[3] \end{array} \right\} \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} 3/x \\ 3/y \end{array} \right\}$$

ومنه يوجد  $k' \in \mathbb{Z}$  حيث  $k = 3k'$

$$S = \left\{ (6054k' + 2979; 6243k' + 3072) / k' \in \mathbb{Z} \right\} \text{ ومنه حلول المعادلة } (E') \text{ بحيث } \text{pgcd}(x, y) = 3 \text{ هي: } p \text{ gcd}(x, y) = 3$$

$$B = \overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}^5 ; A = \overline{\alpha\beta 0\alpha\alpha}^5 \quad / 3$$

أ - تبيان أنه إذا كان  $B - A = 63$  فإن  $19\alpha + 6\beta = 63 \dots (*)$

0.5

$$\text{حيث } \left\{ \begin{array}{l} A = \overline{\alpha\beta 0\alpha\alpha}^5 = \alpha.5^0 + \alpha.5^1 + 0.5^2 + \beta.5^3 + \alpha.5^4 \\ B = \overline{\alpha\beta\alpha\beta\beta}^5 = \beta.5^0 + \beta.5^1 + \alpha.5^2 + \beta.5^3 + \alpha.5^4 \end{array} \right. \text{ لدينا } 0 \leq \beta \leq 4 \text{ و } 0 \leq \alpha \leq 4$$

$$B - A = 19\alpha + 6\beta \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} A = 631\alpha + 125\beta \\ B = 650\alpha + 131\beta \end{array} \right.$$

ومنه إذا كان  $B - A = 63$  فإن  $19\alpha + 6\beta = 63 \dots (*)$



ب - تبين أنه توجد ثنائية وحيدة  $(\alpha; \beta)$  من  $\mathbb{N}^2$  تحقق المعادلة (\*) ثم استنتاج كتابة العدان  $A$  و  $B$  في النظام العشري

$$\beta \in \{0; 2; 3; 4\} \text{ و } \alpha \in \{1; 2; 3; 4\} \text{ لدينا}$$

| 4   | 3  | 2  | 1  |   |
|-----|----|----|----|---|
| 76  | 57 | 38 | 19 | 0 |
| 82  | 63 | 44 | 25 | 1 |
| 88  | 69 | 50 | 31 | 2 |
| 94  | 75 | 56 | 37 | 3 |
| 100 | 81 | 62 | 43 | 4 |

ومنه توجد ثنائية وحيدة  $(\alpha; \beta)$  تحقق المعادلة (\*) حيث  $(\alpha; \beta) = (3; 1)$ .

● استنتاج كتابة العدان  $A$  و  $B$  في النظام العشري :

$$\begin{cases} A = 2018 \\ B = 2081 \end{cases} \text{ ومنه نجد } \begin{cases} A = 631(3) + 125(1) \\ B = 650(3) + 131(1) \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} A = 631\alpha + 125\beta \\ B = 650\alpha + 131\beta \end{cases} \text{ لدينا}$$

0.5

0.5