ثانوية محمود بن محمود- قالمة السنة الدراسية : 2020/2019

القسم : 3ع 1 المدة : 01 سا

الفرض المحروس الثاني في مادة الرياضيات

التمرين 01 : (07 نقاط)

نعتبر كثير حدود f للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x) = 2x^2 - x - 1$.

1) عين جذور $f(x)$ ثم اكتب تحليلا لـ $f(x)$.

2) استنتج حلول المعادلة : $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$.

3) استنتج حلول المتراجحة : $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 < 0$.

التمرين 02 : (13 نقطة)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x) = e^x - x - 1 .$$

ادرس اتجاه تغير الدالة g مستنتجا إشارتها ، ثم علل أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$e^x - x > 0$$

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1) احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$ ثم فسر النتائج هندسيا .

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها .

3) عين معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها 0 .

4) ادرس الوضعية النسبية لـ $(\mathcal{C}_f)$ و (T) ، ماذا نسمي النقطة التي فاصلتها 0 ؟

5) ارسم (T) و $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم السابق .

بالتوفيق

عرض حال للفرض الثاني
في الرياضيات
في بسا

التمرين 01: (07 نقاط)

$f(x) = 2x^2 - x - 1$

1) - تعيين جذور $f(x)$: (2)

بما أن $2 - 1 - 1 = 0$ فإن:

$x_1 = 1$

$x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$

* تحليل $f(x)$:

$f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)$

$f(x) = (2x + 1)(x - 1)$ (2)

2) - استنتاج حلول المعادلة: $2(\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$

$2(\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$; $D =]0; +\infty[$

بوضع $y = \ln x$ تصبح المعادلة:

$2y^2 - y - 1 = 0$

ومنه:

$\begin{cases} y = 1 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

أي: $\begin{cases} \ln x = 1 \\ \ln x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x = e \\ x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$ (2)

$S = \left\{e; \frac{1}{\sqrt{e}}\right\}$

3) - استنتاج حلول المتراجحة:

$2(\ln x)^2 - \ln x - 1 < 0$ (2)

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		e		$+\infty$
$2(\ln x)^2 - \ln x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S = \left]\frac{1}{\sqrt{e}}; e\right[$

التمرين 02: (13 نقطة)

I) - $g(x) = e^x - x - 1$; $D_g = \mathbb{R}$

* دراسة تغيرات الدالة g:

* النهايات:

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - x - 1) = +\infty$ (01)

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right)\right)$ (01)

$= +\infty$ (01)

* المشتقة: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$g'(x) = e^x - 1$ (01)

$e^x - 1 = 0$

$e^x = e^0 \rightarrow x = 0$

$e^x - 1 > 0$

$e^x > e^0 \rightarrow x > 0$

$e^x - 1 < 0 \rightarrow e^x < e^0 \rightarrow x < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

(01)

* التغيرات لـ g:

جدول التغيرات: (01)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(01)

$g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

* استنتاج إشارة $g(x)$: (01)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

* التحليل آنفا من أجل كل عدد حقيقي x:

$e^x - x > 0$

لدينا: $g(x) \geq 0$ معناه: $e^x - x - 1 \geq 0$

ومنه: $e^x - x \geq 1$ (01)

وبالتالي: $e^x - x > 0$.

II) $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$; $D_f = \mathbb{R}$

1) - حساب النهايات:

$$f(1)=\frac{1}{e-1}$$

3) معادلة المماس (T) لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها:

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$f'(0)=\frac{(1-0)e^0}{(e^0-0)^2}=1$$

$$f(0)=0$$

ومنه: $(T): y=x$ (1)

4) دراسة وضعية $(\mathcal{C}_f)$ و (T):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

$$f(x)-y=\frac{x}{e^x-x}-x=\frac{x-x(e^x-x)}{e^x-x}$$

$$f(x)-y=\frac{x-xe^x+x^2}{e^x-x}=\frac{-x(-1+e^x-x)}{e^x-x}$$

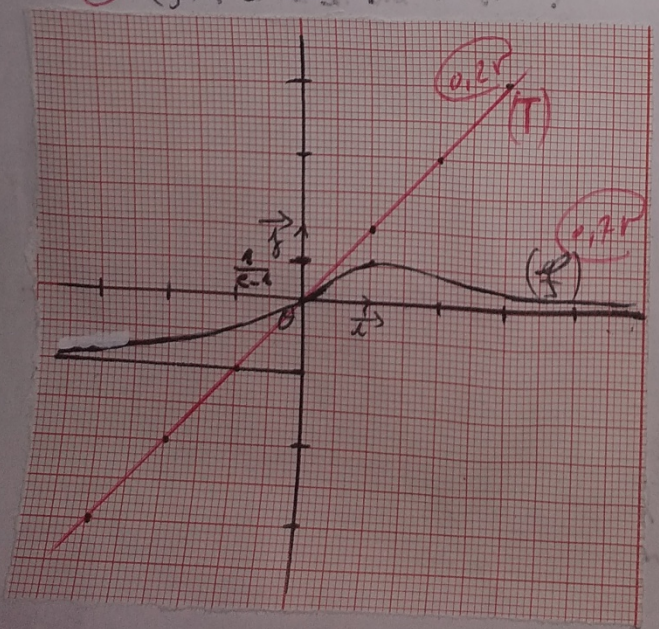
$$f(x)-y=\frac{-x\,g(x)}{e^x-x}$$ (0,5)

لدينا: $e^x-x>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة: الجداء $-x\times g(x)$ (0,5)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	(T) تحت $(\mathcal{C}_f)$		(T) و $(\mathcal{C}_f)$ متقاطعان		(T) تحت $(\mathcal{C}_f)$

(1)

(1) $(\mathcal{C}_f)$ يقبل النقطة $(0,0)$ نقطة انعطاف.



$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^x-x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x(1)}{x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}-1}\right)=-1$$ (0,5)

($\frac{e^x}{x}\to 0$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x(1)}{x\left(\frac{e^x}{x}-1\right)}\right)$$

($\frac{e^x}{x}\to+\infty$)

$$=0$$ (0,5)

* التفسير الهندسي:

$y=-1$ مستقيم مقارب أفقي في جوار $-\infty$ (0,5)

$y=0$ مستقيم مقارب أفقي في جوار $+\infty$ (0,5)

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f:

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{(e^x-x)-(e^x-1)x}{(e^x-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x-x-xe^x+x}{(e^x-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(1-x)e^x}{(e^x-x)^2}$$ (0,5)

$e^x>0$ و $(e^x-x)^2>0$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $1-x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

(0,5)

$1-x=0\to x=1$

التغيرات لغوا: (0,5)

تنزل التغيرات: (0,5)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$\frac{1}{e-1}$	↘	0