

الفرض المحروس الأول في الثلاثي الثاني
مادة: الرياضيات

المدة : ساعة

التمرين الأول:

لتكن h الدالة المعرفة على $[0, 1]$ كما يلي : $h(x) = \frac{3x}{1+2x}$ و (C) تمثيلها البياني و (D) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس (أنظر الشكل المقابل)
✓ المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $u_0 = \alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_{n+1} = h(u_n)$
(1) عين α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة

$$(2) \text{ نفرض أن } \alpha = \frac{1}{2}$$

1. أعد الرسم السابق ثم ضع على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 دون الحساب مبرزا خطوط العمل

2. ضع تخمين حول اتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n)

3. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n على صحة الخاصية الأتية : $0 < u_n < 1$

4. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n أن :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-2u_n^2 + 2u_n}{1 + 2u_n}$$

5. برر لماذا (u_n) متقاربة

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \quad \square \text{ ب : } (v_n) \text{ المتتالية المعرفة على } \square$$

1. برهن أن عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هو $v_n = 3^n$ ، إستنتج عبارة u_n بدلالة n

2. أحسب مرة ثانية $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $p_n = \left(\frac{u_0}{1-u_0}\right) \times \left(\frac{u_1}{1-u_1}\right) \times \left(\frac{u_2}{1-u_2}\right) \times \dots \times \left(\frac{u_n}{1-u_n}\right)$

عين قيمة العدد الطبيعي n حيث $p_n = 3^{210}$

التمرين الثاني:

كيس يحتوي على 20 كرة ، منها 3 صفراء ، 4 حمراء ، 5 بيضاء و 8 سوداء لا نفرق بينهم باللمس .
نسحب من الكيس و بطريقة عشوائية كرتين على التوالي و دون إرجاع الكرة المسحوبة الأولى إلى الكيس قبل سحب الكرة الثانية .
(1) أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : "الكرتان المسحوبتان من نفس اللون" .

B : "الكرة المسحوبة الأولى حمراء" .

C : "كرة حمراء من بين الكرتان المسحوبتان" .

(2) ليكن X المتغير العشوائي المعروف كما يلي : إذا حصلنا على كرة صفراء نربح DA 4 ، و إذا حصلنا على كرة

حمراء نخسر DA 2 ، و إذا حصلنا على كرة بيضاء نربح DA 7 ، و إذا حصلنا على كرة سوداء نخسر DA 3 .

(أ) ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .

(ب) أكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ج) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$. هل اللعبة في صالح اللاعب ؟