

فرض محروس رقم 1 للفصل الثاني

التمرين الأول:

1. لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}$

أ. برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n فان: $1 < u_n < 2$

ب. أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة واستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها.

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \ln(u_n - 1)$

أ. اثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها q وحدها الأول v_0 .

ب. اكتب v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n . ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ من جديد

ج. أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

د. استنتج حساب الجداء P_n حيث: $P_n = (u_0 - 1)(u_1 - 1) \dots (u_n - 1)$

التمرين الثاني:

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $5x - 6y = 3 \dots \dots (E)$

1 (أ) بين أن إذا كانت الثانية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف ل 3.

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

ج) استنتج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

2 (أ) و b عدنان طبيعيا حيث: $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذي الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذي الأساس 5.

- عين α و β حتى تكون الثانية $(a; b)$ حلا للمعادلة (E) .

بالتوفيق للجميع

انتهى

الحل : (1) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}$

أ. برهان بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$ نسمي $P(n)$ الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$

(*) نتأكد من صحة $P(0)$: لدينا : $u_0 = \frac{3}{2}$ منه : $1 < u_0 < 2$ أي : $P(0)$ صحيحة

(**) نفرض صحة $P(n)$ أي أن : $1 < u_n < 2$ (***) نبرهن صحة $P(n+1)$ أي أن : $1 < u_{n+1} < 2$

لدينا : $1 < u_n < 2$ منه : $0 < u_n - 1 < 1$ أي : $0 < \sqrt{u_n - 1} < 1$ إذن : $0 + 1 < \sqrt{u_n - 1} + 1 < 1 + 1$

منه : $1 < u_{n+1} < 2$ أي : $P(n+1)$ صحيحة إذن : من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n < 2$

ب. إثبات أن المتتالية (u_n) متزايدة

لدينا : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 1} + 1 - u_n = \sqrt{u_n - 1} - (u_n - 1) = \frac{(\sqrt{u_n - 1})^2 - (u_n - 1)^2}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)} = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{u_n - 1} + (u_n - 1)}$

لدينا : $\sqrt{u_n - 1} > 0$ و $u_n - 1 > 0$ منه : $\sqrt{u_n - 1} + u_n - 1 > 0$ إشارة $u_{n+1} - u_n$ هي نفس إشارة $-u_n^2 + 3u_n - 2$

- دراسة إشارة $-x^2 + 3x - 2$ (*) حساب المميز : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 1$

$\Delta > 0$ منه لكثير الحدود جذران هما : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 1}{-2} = 2$ و $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 1}{-2} = 1$

جدول إشارة $-x^2 + 3x - 2$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$-x^2 + 3x - 2$	-	0	+	0	-

بما أن : $1 < u_n < 2$

فإن : $0 < u_{n+1} - u_n$ منه : المتتالية (u_n) متزايدة

(*) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو نهاية يطلب تعيينها.

بما أن : المتتالية (u_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 2 فإنها متقاربة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

(2) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $v_n = \ln(u_n - 1)$

(أ) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها q و حدها الأول v_0 .

لدينا : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln(\sqrt{u_n - 1} + 1 - 1) = \ln(\sqrt{u_n - 1}) = \frac{1}{2} \ln(u_n - 1) = \frac{1}{2} v_n$

منه : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول : $v_0 = \ln(u_0 - 1) = \ln\left(\frac{3}{2} - 1\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$

ب (كتابة v_n بدلالة n : لدينا : (v_n) متتالية هندسية حدها الأول v_0 منه : $v_n = v_0 q^n = -\ln 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(**) استنتاج عبارة u_n بدلالة n : لدينا : $v_n = \ln(u_n - 1)$ منه : $e^{v_n} = u_n - 1$ إذن : $e^{-\ln 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1 = u_n$

(***) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ من جديد : لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{-\ln 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1 \right) = 1 + 1 = 2$

لأن : $q = \frac{1}{2} < 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{-\ln 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n} \right) = e^0 = 1$

ج. حساب المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -\ln 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = -2 \ln 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right)$

د. استنتاج حساب الجداء P_n حيث: $P_n = (u_0 - 1)(u_1 - 1) \dots (u_n - 1)$
لدينا: $P_n = (u_0 - 1)(u_1 - 1) \dots (u_n - 1) = (e^{v_0} + 1 - 1)(e^{v_1} + 1 - 1) \dots (e^{v_n} + 1 - 1)$
منه: $P_n = (e^{v_0})(e^{v_1}) \dots (e^{v_n}) = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} = e^{S_n}$

التمرين الثاني: نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $5x - 6y = 3 \dots (E)$

(1) أ) بيان أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن x مضاعف لـ 3.

لدينا: $5x - 6y = 3$ تكافئ $5x = 6y + 3$ تكافئ $5x = 3(2y + 1)$

لدينا: 3 يقسم $5x$ و 3 و 5 أوليان فيما بينهما منه: 3 يقسم x (حسب مبرهنة قوص) و بالتالي x مضاعف 3

ب) استنتاج حلا خاصا للمعادلة (E) : بفرض $x = 3$ نجد: $y = \frac{5 \times 3 - 3}{6} = 2$ إذن: $(3; 2)$ حلا خاصا للمعادلة (E)

حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) . لدينا: $\begin{cases} 5x - 6y = 3 \\ 5 \times 3 - 6 \times 2 = 3 \end{cases}$ بالطرح طرف طرف نجد: $5(x - 3) = 6(y - 2)$ (*)

و لدينا: 6 يقسم $5(x - 3)$ و 6 و 5 أوليان فيما بينهما منه حسب قوص 6 يقسم $x - 3$ إذن: $x - 3 = 6k; k \in \mathbb{Z}$ ومنه: $x = 6k + 3$

بالتعويض في (*) نجد: $5 \times 6k = 6(y - 2)$ إذن: $y = 5k + 2$ و بالتالي: $S = \{(6k + 3; 5k + 2); k \in \mathbb{Z}\}$

ج) استنتاج حلول الجملة (S) : $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

أي: $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x = 6m - 1 \\ x = 5n - 4 \end{cases}$ إذن: $6m - 1 = 5n - 4$ و بالتالي: $5n - 6m = 3$ ومنه: $n = 6k + 3$

ينتج: $n = 6k + 3$ ومنه: $x = 5(6k + 3) - 4 = 30k + 11; k \in \mathbb{Z}$

(2) a و b عدنان طبيعيان حيث: $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذي الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذي الأساس 5.

- تعيين α و β حتى تكون الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (E) .

لدينا: $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}^3 = 1 \times 3^5 + \alpha \times 3^4 + \alpha \times 3^2 = 243 + 81\alpha + 9\alpha = 90\alpha + 243$

و لدينا: $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}^5 = \alpha \times 5^3 + \beta \times 5^2 + \alpha \times 5^0 = 125\alpha + 25\beta + \alpha = 126\alpha + 25\beta$ مع: $\alpha \leq 2$ و $\beta \leq 4$

بما أن: الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (E) منه: $5a - 6b = 3$ و بالتالي: $5(90\alpha + 243) - 6(126\alpha + 25\beta) = 3$ ينتج:

$1215 + 450\alpha - 756\alpha - 150\beta = 3$ إذن: $-306\alpha - 150\beta = -1212$ بالتقسيم على -3 نجد: $102\alpha + 50\beta = 404$

و بالتالي: $(\alpha; \beta) = (2; 4)$ حل للمعادلة.