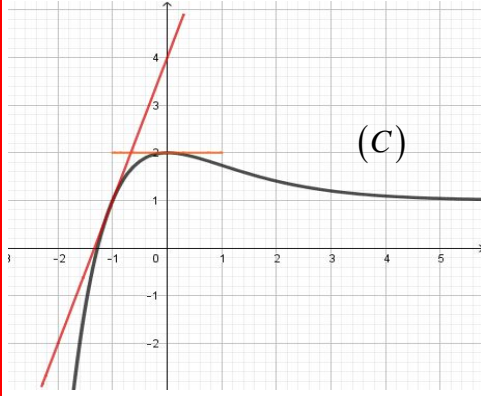


## الفرض الأول للفصل الأول في مادة الرياضيات

## مسألة

(I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . المنحنى  $(C)$  في الشكل هو لدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$

كما يلي :  $f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$  حيث  $a$  ؛  $b$  عدنان حقيقيان .



① أ - بقراءة بيانية عين  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ثم فسر النهاية الأخيرة بيانياً.

ب - عين كلا من  $f(0)$  ؛  $f(-1)$  ؛  $f'(0)$  ؛  $f'(-1)$ .

ج - اعتماداً على ما سبق جد قيمة كل من  $a$  و  $b$  ثم استنتج عبارة  $f(x)$ .

② أ / بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  حيث  $-1,4 < \alpha < -1,2$ .

ب / استنتج إشارة  $f(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

③ نعتبر الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب :  $h(x) = (|x|+1)e^{-x} + 1$

- احسب كلا من  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$  ثم فسر النتيجة هندسياً. (نقبل أن :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}-1}{x} = -1$ )

(II) نضع فيما يلي :  $f(x) = (x+1)e^{-x} + 1$  ونعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = x - \frac{x+2}{e^x}$

$(C_g)$  منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm)$

① أ / احسب كلا من  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ .

ب / بين أن المستقيم  $(T)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل لمنحنى الدالة  $g$  بجوار  $(+\infty)$ .

② أ / بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :  $g'(x) = f(x)$

ب / استنتج اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم شكل جدول تغيراتها.

③ اكتب معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(C_g)$  في النقطة التي فاصلتها -1.

④ بين أن  $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1}$  ثم استنتج حصراً للعدد  $g(\alpha)$ .

⑤ أ / احسب  $g(0)$  ثم أنشئ كلا من  $(\Delta)$  ؛  $(T)$  والمنحنى  $(C_g)$ .

بالتوفيق

ب /  $m$  وسيط حقيقي . ناقش حسب قيم  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $g(x) = x + m$ .

(1)  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$ (أ) - بقراءة بيانية تعيين  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم تفسير النهاية الأخيرة بيانيا :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \bullet$$

تفسير النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  بيانيا : المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  هو مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل بجوار  $(+\infty)$ .ب - تعيين كلا من  $f(0)$  ؛  $f(-1)$  ؛  $f'(0)$  ؛  $f'(-1)$  :

$$f(0) = 2 \quad \bullet \quad f(-1) = 1 \quad \bullet$$

- $f'(0)$  معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها 0 والموازي لحامل محور الفواصل وعليه :  $f'(0) = 0$ .
- $f'(-1)$  معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها -1 وبما أن  $(0; 4)$  و  $(-2; -2)$  هما إحداثيات نقطتين منه فإن :

$$f'(-1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - (-2)}{0 - (-2)} = 3$$

ج - اعتمادا على ما سبق إيجاد قيمة كل من  $a$  و  $b$  ثم استنتاج عبارة  $f(x)$  :

$$\text{لدينا } \begin{cases} f(0) = 2 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} (a(0)+b)e^0 + 1 = 2 \\ (a(-1)+b)e^1 + 1 = 1 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} b+1 = 2 \\ (-a+b)e+1 = 1 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} b = 1 \\ (-a+1)e = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\text{ومنه } f(x) = (x+1)e^{-x} + 1$$

(2) أ / تبين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-1,4 < \alpha < -1,2$  :

- $f$  مستمرة على  $]-1,4; -1,2[$ .
- $f(-1,4) \times f(-1,2) < 0$  ؛  $f(-1,4) = -0,62$  ؛  $f(-1,2) = 0,33$  ؛
- $f$  رتيبة على  $]-1,4; -1,2[$  (متزايدة تماما).
- ومنه وحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $-1,4 < \alpha < -1,2$ .

ب / استنتاج إشارة  $f(x)$  على  $\mathbb{R}$  :

|        |           |          |           |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | -         | 0        | +         |

(3) الدالة  $h$  معرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $h(x) = (|x|+1)e^{-x} + 1$ 

- حساب كلا من  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x}$  ثم تفسير النتيجة هندسيا :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(|x|+1)e^{-x} + 1 - 2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(x+1)e^{-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{xe^{-x} + e^{-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{xe^{-x}}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{x} \right) = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(|x|+1)e^{-x} + 1 - 2}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(-x+1)e^{-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-xe^{-x} + e^{-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-\cancel{x}e^{-x}}{\cancel{x}} + \frac{e^{-x} - 1}{x} \right) = -2$$

التفسير الهندسي :

- الدالة  $h$  لاتقبل الاشتقاق في النقطة التي فاصلتها 0 ومنحناها يقبل نصف مماس على يمين الصفر معامل توجيهه 0 ويقبل نصف مماس على يسار الصفر معامل توجيهه -2.

( II )  $f(x) = (x+1)e^{-x} + 1$  ؛  $g$  معرفة على  $\mathbb{R}$  ب :  $g(x) = x - \frac{x+2}{e^x}$

① / حساب كلا من  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - \frac{x+2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 - \frac{1 + \frac{2}{x}}{e^x} \right) = +\infty \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{x+2}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right) = +\infty \bullet$$

ب / تبين أن المستقيم  $(T)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل لمنحنى الدالة  $g$  بجوار  $(+\infty)$  .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \frac{x+2}{e^x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} \right) = 0$$

بما أن  $0$  فإن المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  هو مستقيم مقارب مائل لمنحنى  $g$  بجوار  $(+\infty)$  .

② / تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  فإن :  $g'(x) = f(x)$

$g$  تقبل الاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ولدينا :

$$g'(x) = \left( x - \frac{x+2}{e^x} \right)' = (x - (x+2)e^{-x})' = 1 - (e^{-x} - (x+2)e^{-x}) = 1 - ((1-x-2)e^{-x}) = 1 - (-x-1)e^{-x}$$

$$\text{ومنه } g'(x) = 1 + (x+1)e^{-x} = f(x)$$

ب / استنتاج اتجاه تغير الدالة  $g$  ثم إنشاء جدول تغيراتها :

لدينا  $g'(x) = f(x)$  ومنه إشارة  $g'(x)$  هي من إشارة  $f(x)$

•  $g'(x) = 0$  تكافئ  $f(x) = 0$  ومنه  $x = \alpha$  .

•  $g'(x) < 0$  تكافئ  $f(x) < 0$  ومنه  $x \in ]-\infty; \alpha[$  ومنه  $g$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; \alpha[$  .

•  $g'(x) > 0$  تكافئ  $f(x) > 0$  ومنه  $x \in ]\alpha; +\infty[$  ومنه  $g$  متزايدة تماما على المجال  $]\alpha; +\infty[$  .

• جدول التغيرات :

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $g'(x)$ | -         | 0           | +         |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $g(\alpha)$ | $+\infty$ |

③ كتابة معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(C_g)$  في النقطة التي فاصلتها -1 :

$$(\Delta): y = g'(-1)(x - (-1)) + g(-1)$$

$$\text{لدينا } g(-1) = -1 - e \text{ و } g'(-1) = f(-1) = 1$$

$$\text{ومنه } (\Delta): y = 1(x+1) - 1 - e$$

$$\text{ومنه } (\Delta): y = x - e$$

④ تبين أن  $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1}$  ثم استنتاج حصر للعدد  $g(\alpha)$  :

$$\text{لدينا } g(\alpha) = \alpha - (\alpha + 2)e^{-\alpha}$$

$$\text{ولدينا } f(\alpha) = 0 \text{ تكافئ } (\alpha + 1)e^{-\alpha} + 1 = 0 \text{ ومنه } e^{-\alpha} = \frac{-1}{\alpha + 1}$$

وبالتعويض بقيمة  $e^{-\alpha}$  في عبارة  $g(\alpha)$  نجد :

$$g(\alpha) = \alpha - (\alpha + 2) \frac{-1}{\alpha + 1}$$

$$= \alpha + \frac{\alpha + 2}{\alpha + 1}$$

$$= \alpha + \frac{(\alpha + 1) + 1}{\alpha + 1}$$

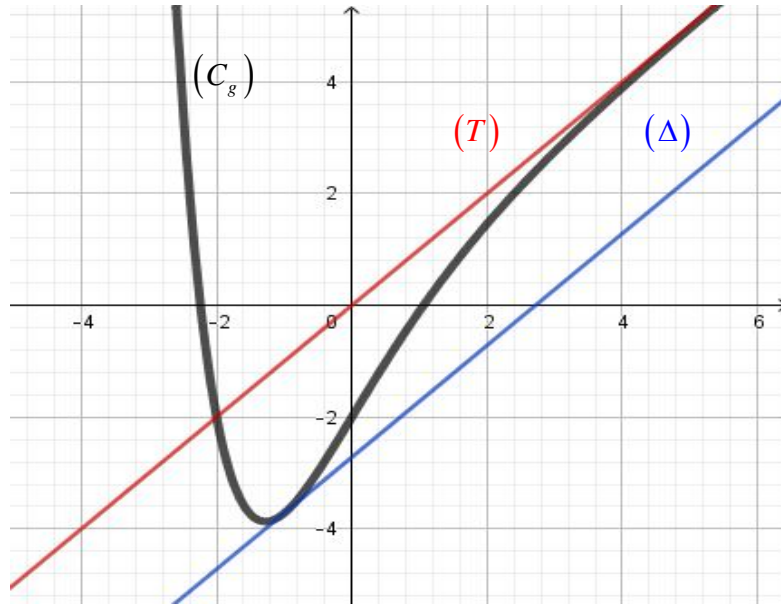
$$= \alpha + \frac{\alpha + 1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha + 1}$$

$$g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha + 1}$$

٥ / أ / حساب  $g(0)$  ثم إنشاء كلا من  $(\Delta)$  ؛  $(T)$  والمنحنى  $(C_g)$  :

$$g(0) = -2 \bullet$$

• الإنشاء :



ب / المناقشة حسب قيم  $m$  عدد وإشارة حلول المعادلة  $g(x) = x + m$

حلول المعادلة  $g(x) = x + m$  هي فواصل نقط تقاطع  $(C_g)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = x + m$  والموازي للمستقيمين  $(\Delta)$  و  $(T)$  .

- من أجل  $m \in ]-\infty; -e[$  المعادلة ليس لها حلول .
- من أجل  $m = -e$  المعادلة لها حل مضاعف سالب تماما .
- من أجل  $m \in ]-e; -2[$  المعادلة لها حلان سالبان تماما .
- من أجل  $m = -2$  المعادلة لها حلان أحدهما سالب والآخر معدوم .
- من أجل  $m \in ]-2; 0[$  المعادلة لها حلان مختلفان في الإشارة .
- من أجل  $m \in [0; +\infty[$  المعادلة لها حل واحد سالب تماما .

بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا 2019