

التمرين الأول : (06 نقاط)

- من أجل كل عدد صحيح n نضع: $A(n) = n^2 - n + 2007$
- 1 / أ. حل إلى جداء عوامل أولية العددين 4014 و $A(1)$.
 - ب. أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 4014 و $A(1)$.
 - 2 / بين أنه إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم $A(n)$. هل العكس صحيح؟ برر إجابتك.
 - 3 / أ. تحقق أنه من أجل كل عدد صحيح n : $(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = (n^2 - n + 2007) + 2n$
 - 4 / بين أنه إذا كان $A(n)$ عدد فردي فإن $A(n+1)$ عدد فردي.
 - 5 / عين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $A(n)$ يقسم $A(1)$.

التمرين الثاني (07 نقاط)

- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة الآتية: $11x - 5y = 2 \dots\dots\dots (E)$
- 1 / أ* برهن أن إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y \equiv 4[11]$.
 - ب* استنتج حلول المعادلة (E)
 - 2 / ليكن n عددا طبعيا غير معدوم، نضع $a = 5n + 2$ و $b = 11n + 4$
 - أ* عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b
 - ب* عين قيم n بحيث يكون $PGCD(a, b) = 2$.
 - ج* استنتج قيم n بحيث يكون العددين a و b أوليان فيما بينهما
 - 3 / أ* ادرس حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10.
 - ب* استنتج رقم أحاد العدد 7^{2014} .
 - ج* عين الثنائيات $(x; y)$ من $N^* \times N^*$ التي هي حلول للمعادلة (E) و تحقق $7^{y-2x} \equiv 9[10]$.

التمرين الثالث (07 نقاط)

- مسابقة إمتحان شفهي تنظم بحيث يسحب المترشح عشوائيا 3 مواضيع من مجموعة تشمل 80 موضوع و يجب على المترشح أن يجيب على موضوع على الأقل من بين المواضيع الثلاثة المسحوبة
- 1] ما هو عدد الطرق لسحب المترشح ثلاثة مواضيع عشوائيا
 - 2] يتقدم مترشح لهذا الإمتحان ولم يدرس سوى 50 موضوع من بين الـ 80 ما احتمال أن
 - A " يجيب المترشح على المواضيع الثلاثة "
 - B " يجيب المترشح على موضوعين فقط "
 - C " يجيب المترشح على موضوع واحد فقط "
 - D " لا يجيب المترشح على أي موضوع "
 - 3] ما هو عدد المواضيع التي يجب أن يدرسها المترشح لكي يكون احتمال سحبه لموضوع درسه على الأقل يتجاوز

تصحيح الفرض المحروس الثالث

التمرين الأول:

من أجل كل عدد صحيح n نضع: $A(n) = n^2 - n + 2007$

1. أ. التحليل إلى جداء عوامل أولية للعدين 4014 و $A(1)$

ب. تعيين $PGCD(A(1); 4014)$

2. نبين أنه إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم $A(n)$

لدينا: 3 يقسم n وبالتالي 3 يقسم n^2

3 يقسم n وبالتالي 3 يقسم $-n$ ومن جهة 3 يقسم 2007

نستنتج أن: 3 يقسم العدد $n^2 - n + 2007$

ومنه: إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم $A(n)$

العكس غير صحيح. التبرير. $A(4) = 4^2 - 4 + 2007 = 2019$

3 يقسم $A(n)$ من أجل $n = 4$ لكن 3 لا يقسم 4.

3. أ. التحقق أن من أجل كل عدد صحيح n : بالحساب

ب. نبين أنه إذا كان $A(n)$ عدد فردي فإن $A(n+1)$ عدد فردي:

إذا كان $A(n)$ فردي فإنه يوجد عدد صحيح k : $A(n) = 2k + 1$

ومنه: $A(n) = n^2 - n + 2007$ و $A(n+1) = (n+1)^2 - (n+1) + 2007$

أي أن $A(n+1) = A(n) + 2n = 2k + 1 + 2n = 2(k+n) + 1$

نضع: $k' = k + n$ ومنه: $A(n+1) = 2k' + 1$ ، عدد صحيح

إذن: إذا كان $A(n)$ عدد فردي فإن $A(n+1)$ عدد فردي.

4. تعيين الأعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $A(n)$

يقسم $A(1)$: $A(n)$ يقسم $A(1)$ معناه $n^2 - n + 2007$ يقسم

2007 ، مجموعة قواسم 2007 هي:

$-2007; -669; -223; -9; -3; -1; 1; 3; 9; 223; 669; 2007$

$n^2 - n + 2007$ يقسم 2007 معناه $n^2 - n + 2007 = -1$ أو

$n^2 - n + 2007 = 1$ أو $n^2 - n + 2007 = 2007$

$n^2 - n + 2007 = -2007$ أو $n^2 - n + 2007 = 669$

$n^2 - n + 2007 = -669$ أو $n^2 - n + 2007 = 9$

$n^2 - n + 2007 = -9$ أو $n^2 - n + 2007 = 223$

$n^2 - n + 2007 = -223$ ومنه: $n^2 - n = 0$

إذن $n = 0$ أو $n = 1$

التمرين الثاني:

1 / أ* إثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا

للمعادلة (E) فإن $y \equiv 4[11]$

لدينا (E) تكافئ $2[11] \equiv -5y$ ومنه $2[11] \equiv 6y$

إذن $2 \times 6y \equiv 2 \times 2[11]$ ومنه $y \equiv 4[11]$

ب * استنتاج حلول المعادلة (E)

مما سبق لدينا $y \equiv 4[11]$ ومنه $y = 11k + 4$ ، بالتعويض في

المعادلة (E) نجد $x = 5k + 2$

إذن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x; y)$ حيث

$$\begin{cases} x = 5k + 2 \\ y = 11k + 4 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2/ أ* تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعدين a و b

نفرض أن $PGCD(a, b) = d$ إذن d يقسم a و d يقسم b

ومنه d يقسم $11a - 5b$ ومنه نستنتج أن d يقسم 2

إذن $d \in \{1; 2\}$

ب * تعيين قيم n بحيث يكون $PGCD(a, b) = 2$

لدينا $PGCD(a, b) = 2$ ومنه 2 يقسم a و 2 يقسم b

ومنه 2 يقسم $2a - b$ إذن 2 يقسم $2(5n + 2) - (11n + 4)$

أي 2 يقسم n ومنه قيم n المطلوبة هي $n = 2\alpha$ / $\alpha \in \mathbb{N}^*$

(أي n عدد طبيعي زوجي)

ج* استنتاج قيم n بحيث يكون a و b أوليان فيما

بينهما

a و b أوليان فيما بينهما معناه $PGCD(a, b) = 1$

وهذا يكافئ $PGCD(a, b) \neq 2$ ومنه قيم n المطلوبة هي

$n = 2\alpha + 1$ / $\alpha \in \mathbb{N}^*$ (أي عدد طبيعي فردي)

3 / أ* دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10.

$4k' + 3$	$4k' + 2$	$4k' + 1$	$4k'$	n
3	9	7	1	البواقي

ب * استنتاج رقم آحاد العدد 7^{2014}

رقم آحاد العدد 7^{2014} هو باقي قسمته على 10

لدينا $2014 = 4 \times 503 + 2$ ومنه 2014 يكتب على الشكل

$$4k' + 2$$

إذن حسب الجواب السابق رقم آحاد العدد 7^{2014} هو 9

ج * تعيين الثنائيات $(x; y)$ من $N^* \times N^*$ التي هي حلول

للمعادلة (E) وتحقق $7^{y-2x} \equiv 9[10]$.

$$7^{y-2x} = 7^{11k'+4-10k'-4} = 7^{k'}$$

و منه $7^{y-2x} \equiv 9[10]$ تكافئ $7^{k'} \equiv 9[10]$ ومنه

$$k' = 4\lambda + 2$$

$$\begin{cases} x = 5(4\lambda + 2) + 2 = 20\lambda + 12 \\ y = 11(4\lambda + 2) + 4 = 44\lambda + 26 \end{cases} / (k \in \mathbb{Z})$$

التمرين الثالث :

1] عدد الطرق لسحب المترشح ثلاثة مواضيع عشوائيا

$$C_{80}^3 = 82160$$

2] حساب احتمال الأحداث :

*** A "يجيب المترشح على المواضيع الثلاثة"**

$$P(A) = \frac{C_{50}^3}{C_{80}^3} = \frac{19600}{82160} = \frac{245}{1027} \approx 0,24$$

*** B "يجيب المترشح على موضوعين فقط"**

$$P(B) = \frac{C_{50}^2 \times C_{30}^1}{C_{80}^3} = \frac{36750}{82160} = \frac{3675}{8216} \approx 0,45$$

*** C "يجيب المترشح على موضوع واحد فقط"**

$$P(C) = \frac{C_{50}^1 \times C_{30}^2}{C_{80}^3} = \frac{21750}{82160} = \frac{2175}{8216} \approx 0,26$$

*** D "لا يجيب المترشح على أي موضوع"**

$$P(D) = \frac{C_{30}^3}{C_{80}^3} = \frac{36750}{82160} = \frac{4060}{8216} = \frac{203}{4108} \approx 0,05$$

3] حساب عدد المواضيع التي يجب أن يدرسها المترشح

لكي يكون احتمال سحبه لموضوع درسه على الأقل

يتجاوز 0,99

نسمي x عدد المواضيع التي يجب ان يدرسها

$$1 - \frac{C_{80-x}^3}{C_{80}^3} \geq 0,99 \quad \text{أي}$$

$$\frac{C_{80-x}^3}{C_{80}^3} \geq 0,01 \quad \text{أي} \quad C_{80-x}^3 \geq 821,6$$

$$(80-x)(79-x)(78-x) > 4929$$

من أجل $x = 61$ نجد :

$$(80-61)(79-61)(78-61) \approx 5814$$

و من أجل $x = 62$ نجد :

$$(80-62)(79-62)(78-62) \approx 4896$$

و من أجل $x = 63$ نجد :

$$(80-63)(79-63)(78-63) \approx 4080$$

فقيمة x هي 62 ونقول أنه على المترشح أن يدرس على الأقل 62 موضوع لكي يكون احتمال سحبه لموضوع درسه على الأقل يتجاوز 0,99