ثانوية محفوظ سعد **المستوى : 3ع ت**

الفرض الاول في للثلاثي الاول في مادة الرياضيات

g دالة معرفة على R بـ $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1/ ادرس تغيرات الدالة g

2/ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 \leq \alpha \leq 2.25$

3/ استنتج اشارة $g(x)$

f دالة معرفة على $R - \{-1, 1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$

1/ احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

2/ برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x من $R - \{-1, 1\}$ لدينا : $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$

3/ ادرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4/ برهن ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$.

5/ ادرس الوضع النسبي بين C_f و (Δ).

6/ بين ان : $f(\alpha) = 1 + \frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$ ثم استنتج حصرا لـ: $f(\alpha)$

7/بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α' حيث $-1.5 \leq \alpha' \leq -1.25$

8/ ارسم C_f و (Δ)

k دالة معرفة على $R - \{\alpha'\}$ بـ: $k(x) = \frac{1}{f(x)}$

9/ادرس تغيرات الدالة k ثم ارسم منحناها

h دالة معرفة على $R - \{0, -2\}$ بـ : $h(x) = f((x+1)^2)$

10/ ادرس تغيرات الدالة الدالة h وشكل جدول تغيراتها .

11/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة $f(x) = |m - 1|$.

12/ ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m حلول المعادلة $f(cos(\theta)) = \frac{1}{m}$ حيث : $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

13/ / ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط θ حلول المعادلة $f(x) = sin(\theta)$.

بالتوفيق استاذ المادة

التصحيح النموذجي للفرض الاول 3عت 1 من اعداد الاستاذ زرقي وليد

g دالة معرفة على R بـ $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1/ دارسة تغيرات الدالة g

- **النهايات :**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

- **الدلة المشتقة :** g دالة قابلة للاشتقاق على R: $g'(x) = 3x^2 - 3$
- **إشارة الدالة المشتقة :**

$3x^2 - 3 = 0$

نجد : $x = 1$ او $x = -1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	-8	↗	$+\infty$

2/ اثبات ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 \le \alpha \le 2.25$

- من جدول التغيرات مستمرة ورتيبة على المجال $[2\,;2.25]$
- لدينا : $g(2) = -2$ و $g(2.25) = 0.64$ ومنه فان : $g(2).g(2.25) \le 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 \le \alpha \le 2.25$

3/ استنتاج اشارة $g(x)$

من جدول التغيرات لدينا :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

$g(x) \le 0$: لدينا $x \in]-\infty;\alpha[$

$g(x) = 0$: لدينا $x = \alpha$

$g(x) \ge 0$: لدينا $x \in]\alpha;+\infty[$

f دالة معرفة على $R - \{-1,1\}$ بـ $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$

1/ حساب النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} = +\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} = +\infty$$

$x=-1$ مستقيم مقارب عمودي لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

$x=1$ مستقيم مقارب عمودي لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

2/ الدالة المشتقة

f دالة قابلة للاشتقاق على $R-\{-1,1\}$:

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2x)(x^2-1)-2x(x^3+x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{3x^4-3x^2+2x^3-2x^2-(2x^4-2x^3-2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2-6x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

3/ دارسة تغيرات الدالة f

- **إشارة الدالة المشتقة :**

x	-∞	-1	0	1	α	+∞
x	−	‖ −	0 +	‖ +	0 +	
$g(x)$	−	‖ −	−	‖ −	+	
$f'(x)$	+	‖ +	−	‖ −	+	

لدينا :

$(x^2-1)^2 > 0$

ومنه إشارة f' من اشارة $xg(x)$

- **جدول التغيرات:**

x	-∞	-1	0	1	α	+∞
$f'(x)$	+	‖ +	−	‖ −	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$	‖ $+\infty$ ↗ -1	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$ ↘ $f(\alpha)$	↗ $+\infty$	

$x\in]-\infty;-1[\cup]-1;0]\cup[\alpha;+\infty[$

f متزايدة

$x\in[0;1[\cup]1;\alpha]$

f متناقصة

4/ اثبات ان المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} - (x+1) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2+1-(x+1)(x^2-1)}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - y = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ C_f بجوار $-\infty$ و $+\infty$

5/ دراسة الوضع النسبي بين C_f و (Δ)

دراسة اشارة المقدار $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1} - (x+1) = \frac{x^3+x^2+1-(x+1)(x^2-1)}{x^2-1} = \frac{x-2}{x^2-1}$$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-1		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$-$	0	$+$		$-$		$+$	
الوضع النسبي		تحت (Δ)	C_f يقطع (Δ)	فوق (Δ)		تحت (Δ)		فوق (Δ)	

$x+2=0$

$x=-2$

$x^2-1=0$ $\quad x^2=1$

$x=-1$ او $x=1$

6/ اثبات ان $f(\alpha) = 1 + \frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3+\alpha^2+1}{\alpha^2-1}$$

$$= \frac{3\alpha+4+\alpha^2+1}{\alpha^2-1} = \frac{\alpha^2+3\alpha+5}{\alpha^2-1} = \frac{\alpha^2-1+1+3\alpha+5}{\alpha^2-1}$$

$$= \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-1} + \frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1} = 1 + \frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$$

$g(\alpha) = 0$

$\alpha^3 - 3\alpha - 4 = 0$

$\alpha^3 = 3\alpha + 4$

استنتاج حصر لـ : $f(\alpha)$

لدينا : $2 \leq \alpha \leq 2.25$

باضرب في 3 و اضافة 6 الى جميع الاطراف نجد : $12 \leq 3\alpha + 6 \leq 12.75$ ..... (1)

لدينا : $2 \leq \alpha \leq 2.25$

بتربيع اطراف المتراجحة ثم اضافة 1- الى جميع الاطراف نجد : $3 \leq \alpha^2 - 1 \leq 4.06$

بقلب اطراف المتراجحة نجد $\frac{1}{4.06} \leq \frac{1}{\alpha^2 - 1} \leq \frac{1}{3}$ ..... (2)

بضرب اطراف المتراجحة (1) في اطراف المتراجحة (2) نجد :

$$\frac{12}{4.06} \leq \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1} \leq \frac{12.75}{3}$$

نضيف 1 الى جميع الاطراف نجد :

$$3.95 \leq \frac{3\alpha + 6}{\alpha^2 - 1} + 6 \leq 5.25$$

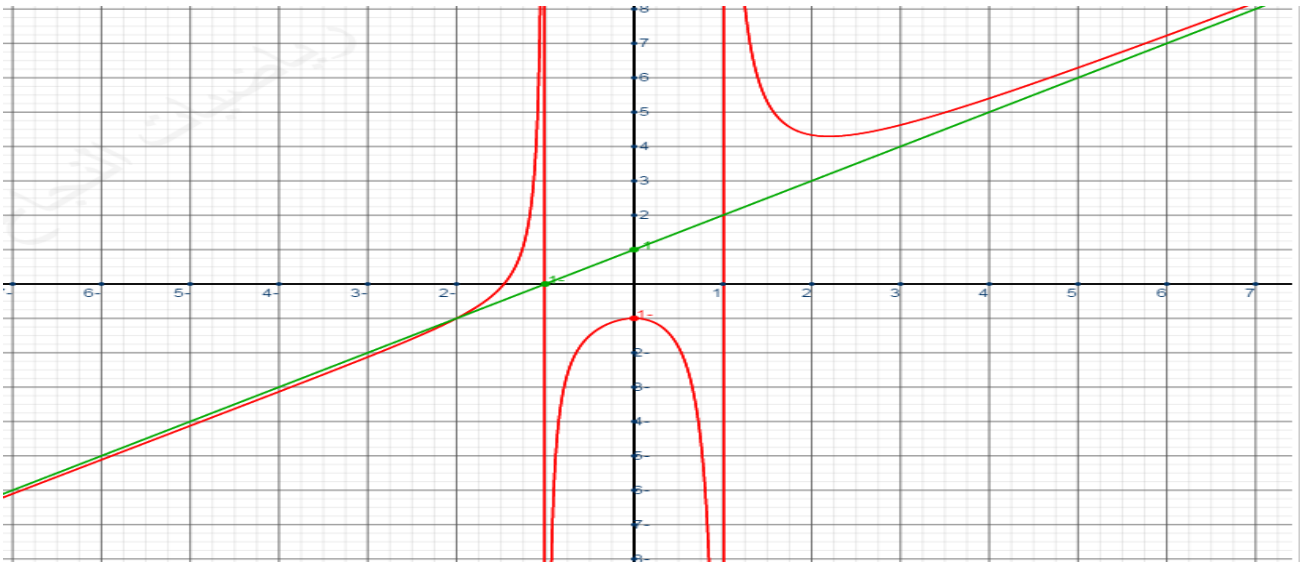
ومنه : $3.95 \leq f(\alpha) \leq 5.25$

7/ اثبات ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α' حيث $-1.5 \leq \alpha' \leq -1.25$

- من جدول التغيرات f مستمرة ورتيبة على المجال $[-1.5; -1.25]$
- لدينا : $f(-1.25) = \cdots$ و $f(-1.5) = \cdots$ ومنه فان : $f(-1.25).f(-1.5) \leq 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α' حيث $-1.5 \leq \alpha' \leq -1.25$

8/ رسم C_f و (Δ)



k دالة معرفة على $R-\{\alpha'\}$ بـ: $k(x)=\frac{1}{f(x)}$

9/ دارسة تغيرات الدالة k

- **النهايات :**

$$\lim_{x\to-\infty} k(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} k(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$$

$$\lim_{x\to\alpha'^{<}} k(x)=\lim_{x\to\alpha'^{<}}\frac{1}{f(x)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\alpha'^{>}} k(x)=\lim_{x\to\alpha'^{>}}\frac{1}{f(x)}=+\infty$$

- **الدلة المشتقة** : k دالة قابلة للاشتقاق على $R-\{\alpha'\}$:

$$k'(x)=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

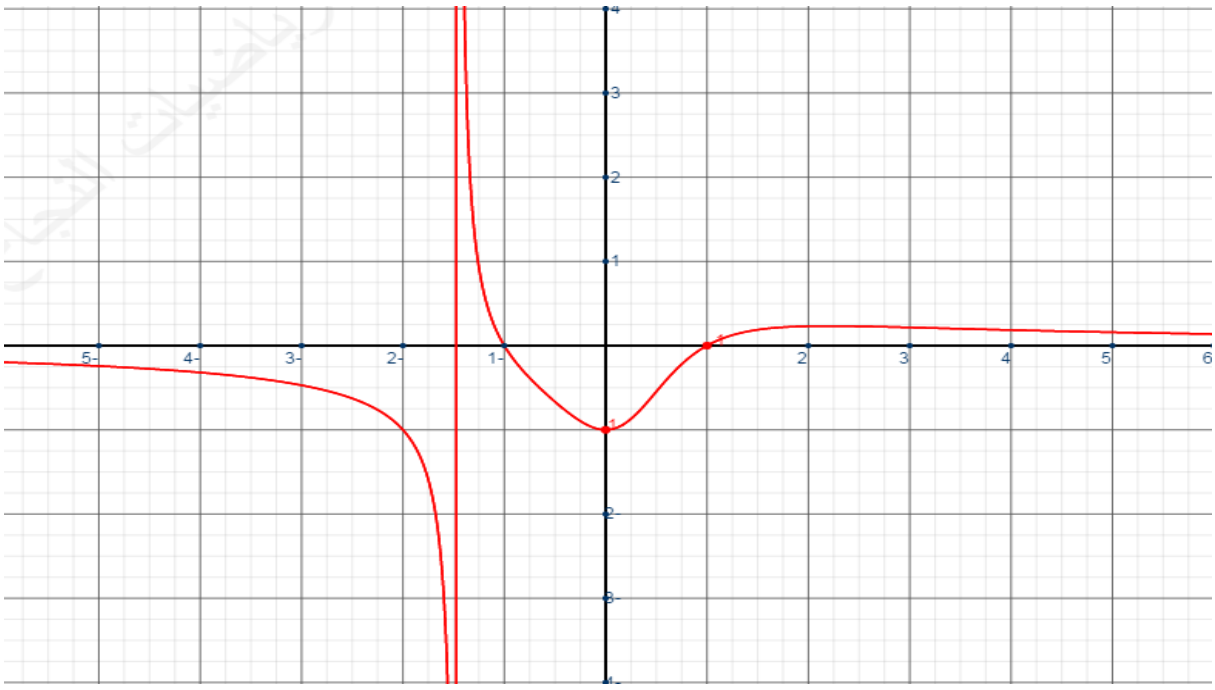
- **جدول التغيرات :**

x	$-\infty$	α'	0	α	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	‖	$-$ 0 $+$	0	$-$
$k(x)$	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ -1	↗ $k(\alpha)$	↘ 0

$$(f(x))^2 \succ 0$$

ومنه اشارة k' من اشارة $-f'(x)$

رسم C_k



h دالة معرفة على: $R-\{-2\,,0\}$ بـ: $h(x)=f((x+1)^2)$

10/ دراسة تغيرات h

النهايات :

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty} f((x+1)^2)=\lim_{y\to+\infty} f(y)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} f((x+1)^2)=\lim_{y\to+\infty} f(y)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} h(x)=\lim_{x\to-2^-} h(x)=\lim_{x\to-2^-} f((x+1)^2)=\lim_{y\to1^+} f(y)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} h(x)=\lim_{x\to-2^+} h(x)=\lim_{x\to-2^+} f((x+1)^2)=\lim_{y\to1^-} f(y)=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} h(x)=\lim_{x\to0^-} h(x)=\lim_{x\to0^-} f((x+1)^2)=\lim_{y\to1^-} f(y)=-\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} h(x)=\lim_{x\to0^+} h(x)=\lim_{x\to0^+} f((x+1)^2)=\lim_{y\to1^+} f(y)=+\infty$$

الدالة المشتقة : h دالة قابلة للاشتقاق على $R-\{-2\,,0\}$

$$h'(x)=(2x+2)\,f'((x+1)^2)$$

اشارة الدالة المشتقة :

$2x+2=0$ يكافئ $x=-1$

$f'((x+1)^2)=0$ يكافئ : $(x+1)^2=0$ او $(x+1)^2=0$

يكافئ : $x=0$ او $x=-\sqrt{\alpha}-1$ او $x=\sqrt{\alpha}-1$

$f'((x+1)^2)\le0$ يكافئ : $0\le(x+1)^2\le\alpha$ يكافئ: $-\sqrt{\alpha}-1\le x\le\sqrt{\alpha}-1$

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-\sqrt{\alpha}-1$	-2	-1	0	$-\sqrt{\alpha}-1$	$+\infty$
$2x+2$	-	-	-	+	+	+	
$f'(x+1)^2$	+	-	-	-	+	+	
$h'(x)$	-	+	+	-	-	+	
$h(x)$	$-\infty$ ↘	$h(-\sqrt{\alpha}-1)$ ↗	$-\infty$	↗ -1 ↘	$-\infty$	↘ $h(-\sqrt{\alpha}-1)$ ↗	$+\infty$

11/ مناقشة حلول المعادلة $f(x) = |m-1|$

نضع $m-1=k$ تصبح المعادلة : $f(x)=|k|$

$|k|\in[0;f(\alpha)[$ أي : $k\in]-f(\alpha);f(\alpha)[$ المعادلة $f(x)=|m-1|$ تقبل حل وحيد

$|k|=f(\alpha)$ اي $k=-f(\alpha)$ او $k=f(\alpha)$ المعادلة $f(x)=|m-1|$ تقبل حلان

$|k|\in]f(\alpha);+\infty[$ أي : $k\in]-\infty;-f(\alpha)[\cup]f(\alpha);+\infty[$ المعادلة $f(x)=|m-1|$ تقبل 3 حلول

المناقشة حسب قيم m لدينا : $m=k+1$

$m\in]-f(\alpha)+1;f(\alpha)+1[$ المعادلة $f(x)=|m-1|$ تقبل حل وحيد

$m=-f(\alpha)+1$ او $m=f(\alpha)+1$ المعادلة $f(x)=|m-1|$ تقبل حلان

$m\in]-\infty;-f(\alpha)+1[\cup]f(\alpha)+1;+\infty[$ المعادلة $f(x)=|m-1|$ تقبل 3 حلول

12/ مناقشة حلول المعادلة $f(cos(\theta))=\frac{1}{m}$

المعادلة $f(cos(\theta))=\frac{1}{m}$ تكافئ المعادلة : $\frac{1}{f(cos(\theta))}=m$ تكافئ : $k(cos(\theta))=m$

نناقش بيانيا مع منحنى الدالة k ونأخذ فقط الحلول المحصورة بين -1 و1 لان $-1\leq cos(\theta)\leq 1$

$m\in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ المعادلة $f(cos(\theta))=\frac{1}{m}$ لا تقبل حلول

$m=-1$ المعادلة $f(cos(\theta))=\frac{1}{m}$ تقبل حل وحيد اذا كان المجهول $cos(\theta)$ وتقبل حلان اذا كان المجهول θ

$m\in]-1;0[$ المعادلة $f(cos(\theta))=\frac{1}{m}$ تقبل حلان اذا كان المجهول $cos(\theta)$ وتقبل 4 حلول اذا كان المجهول θ

$m=0$ المعادلة $f(cos(P))=\frac{1}{m}$ تقبل حلان

13/ مناقشة حلول المعادلة $f(x)=\sin(\theta)$

نضع $\sin(\theta)=t$ تصبح المعادلة $f(x)=t$

من اجل $\theta=\frac{3\pi}{2}$ فان $t=-1$ المعادلة $f(x)=\sin(\theta)$ تقبل حلان

$\theta\in[0;\frac{3\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2};2\pi]$ فان : $-1\leq t\leq 1$ المعادلة $f(x)=\sin(\theta)$ لا تقبل حلول