الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

ثـــانوية أبي ذر الغفاري ، خميس مليانة — إمتحان بكالوريا تجريبي
السنة الثالثة تسيير و إقتصاد — الإثنين 04 ماي 2026

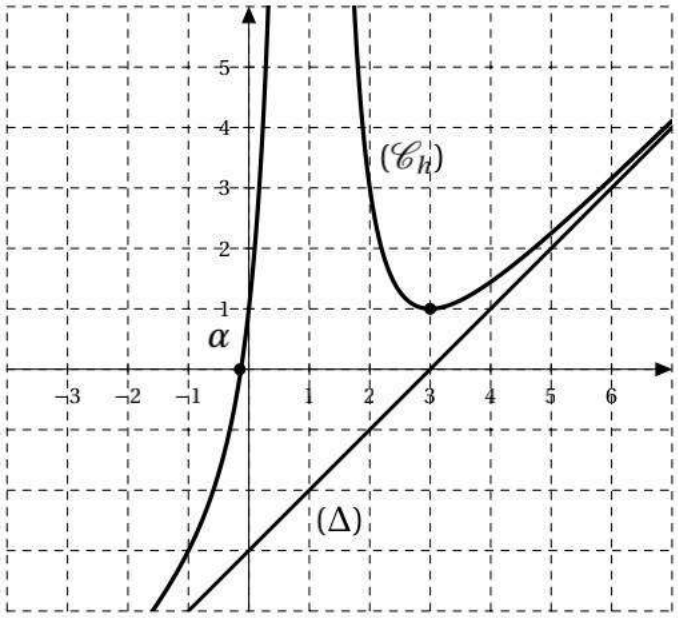
المـــادة : ريـــاضـــيـــات — المدة : ثلاث ساعات و نصف

على المترشح إختيار أحد الموضوعين :

الموضوع الأول

التمرين الأول:(04 نقاط)

h دالة مُعرفة على $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ بتمثيلها البياني $(\mathscr{C}_h)$ ، (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathscr{C}_h)$.
$(\mathscr{C}_h)$ يقطع محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها α حيث : $-0.2 < \alpha < -0.1$



بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية مع التبرير :

1. حَـدِدْ إشارة $h(x)$ على $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$.
2. أُكتب معادلة للمستقيم المقارب المائل (Δ).
3. عين إشارة $h'(x)$ على $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$.
4. حُل في $\mathbb{R}-\{1\}$ المعادلة : $h(x)\times h'(x)=0$
5. نَاقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $h(x)=x+m$
6. H دالة أصلية للدالة h على $]-\infty\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[$ عين اتجاه تغير الدالة H.

التمرين الثاني:(04 نقاط)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية عددية مُعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول : $u_0=e^2-1$ وبالعلاقة التراجعية : $u_{n+1}=e^{-2}u_n+e^{-2}-1$.

1. أ) برهن بالتراجع ، من أجل كل عدد طبيعي n أن : $u_n>-1$

ب) أُدرس إتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ج) هل المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$مُتقاربة ؟ برر صحة إجابتك .

2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=3u_n+3$

أ) أثبت أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

ب) أُكتب عبارة v_n بدلالة n و إستنتج عبارة الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$، ثم أُحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3. ليكن S_n المجموع المُعرف بـ : $S_n=\ln v_0+\ln v_1+\cdots\cdots+\ln v_n$

بين من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ أن : $S_n=(n+1)(-n+2+\ln 3)$

إقلب الورقة

التمرين الثالث:(04 نقاط)

P كثير الحدود المُعرف على $\mathbb{R}$ بـ : $P(X)=X^3+X^2-22X-40$

1. أ) تحقق من أجل كل عدد حقيقي X أن : $P(X)=(X-5)(X^2+6X+8)$

ب) حُل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(X)=0$

ج) اِستنتج إشارة $P(X)$ على $\mathbb{R}$.

2. حُل في $\mathbb{R}$ المعادلة (★) حيث : $e^{3x}+e^{2x}-22e^{x}-40=0\cdots\cdots(★)$

3. اِستنتج في المجال $]-\infty+\ ;\ 0[$ مجموعة حلول المعادلة (♣) حيث : $(\ln x)^3+(\ln x)^2-22\ln x-40=0\cdots\cdots(♣)$

4. حُل في المجال $[-2\ ;\ 4-]$ المتراجحة (♠) حيث : $\log(x^3+x^2-22x-39)>0\cdots\cdots(♠)$

التمرين الرابع:(08 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=-xe^{-x}$

الجدول المقابل يُمثل جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{-1}{e}$	↗	0

1. أحسب $g(0)$.

2. اِستنتج إشارة $g(x)$ من اجل كل عدد حقيقي x موجب .

II) نعتبر الدالة f المُعرفة على $]-\infty+\ ;\ 0]$ بـ : $f(x)=xe^{-x}+e^{-x}$

وَ $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i}\ ;\vec{j}\right)$

1. أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فَسر النتيجة هندسياً .

2. أ) بين من أجل كل $x\in[0\ ;\ +\infty[$ أنَ : $f'(x)=g(x)$

ب) اِستنتج اِتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أُكتب معادلة المماس $(\mathscr{T})$ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها 1.

4. أ) أرسم $(\mathscr{T})$ و $(\mathscr{C}_f)$ حيث : $\|\vec{i}\|=2\ cm$

ب) نَاقِش بيَانياً وَ حَسب قيم الوسيط الحقيقي m عَدد حُلول المعَادلة : $f(x)=m$.

5. نعتبر الدالة F المُعرفة على $]-\infty+\ ;\ 0]$ بـ : $F(x)=-xe^{-x}-2e^{-x}+4$

أ) بين أن F دالة أصلية لـ f على $[0\ ;\ +\infty[$

ب) أحسب بـ cm^2 المساحة $\mathscr{A}$ للحيز المحصوربين $(\mathscr{C}_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما :
$x=1$ و $x=2$

6. يُنتِجْ مَصْنَعْ حَدِيْد كَمِية q (مُقدرة بالطن) ، الكُلفة الهامشية C_m لإنتاج كمية q تُعطى بِـ : $C_m(q)=f(q)$
حيث : $0\le q\le 4$ (الكُلفة الهامِشية مُقدرة بملايين الدنانير)

أ) جِدْ عِبارة الكُلفة الإجمالية C_T لإنتاج q طن علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج 2 طن من الحديد هي 3.45 مليونَ دينار .

ب) أُحسب القيمة المتوسطة للكلفة الإجمالية عندما ينتج المصنع مابين 1 إلى 2 طن من الحديد .

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(04 نقاط)

h دالة مُعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بجدول تغيراتها الموجود أسفله ، و $(\mathscr{C}_h)$ تمثيلها البياني ، $(\mathscr{C}_h)$ يقطع محور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها α حيث : $-0.2 < \alpha < -0.1$

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$	$+\infty$	↘	$+\infty$
			1		1	
		↗	-3	↘		↗

أجب عن الأسئلة التالية مع التبرير .

1. حَدد إشارة $h(x)$ على $\mathbb{R}-\{1\}$.
2. قارن بين العددين $h\left(\frac{1}{2026}\right)$ و $h\left(\frac{1}{2025}\right)$
3. حُل في $\mathbb{R}-\{1\}$ المعادلة ذات المتغير x : $h^2(x)+2h(x)-3=0$
4. أُكتب معادلة للمماس $(\mathscr{T})$ للمنحنى $(\mathscr{C}_h)$ في النقطة التي فاصلتها 3.
5. عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة : $h(x)=m$ ثلاث حلول موجبة تماما .
6. H دالة أصلية لـ h على $\mathbb{R}-\{1\}$ ، عين إتجاه تغير الدالة H .

التمرين الثاني:(04 نقاط)

I) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية عددية مُعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول : $u_0=30$ وبالعلاقة التراجعية : $u_{n+1}=0.4u_n+12$
ونعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n-20$

1. بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ليست متتالية حسابية وليست متتالية هندسية .
2. برهن أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية هندسية أساسها $q=0.4$ يُطلب تعيين حدها الأول v_0 ثم عبارة حدها العام v_n.
3. أُكتب عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II) مؤسسة جامعية كان بها 3000 طالب جامعي سنة 2018 ، بعد كل سنة يَتَخرج منها 60% من الطلبة و يُسجل فيها 1200 طالب جديد ، نعتبر المئة هي الوحدة ونرمز بـ : u_n لعدد الطُلاب الجامعيين في السنة $2018+n$ أي : $u_0=30$

1. ماهو عدد الطُلاب الجامعيين في سنة 2019 ثم في سنة 2020 ؟
2. أ) تحقق أن عدد الطُلاب في السنة $n+1$ يُعطى بالعبارة : $u_{n+1}=0.4u_n+12$
   ب) بين أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية متناقصة تماما .
   ج) هل يُمكن أن يَصِل عدد الطُلاب في هذه المؤسسة الجامعية إلى 2000 طالب ؟ برر إجابتك .

التمرين الثالث:(04 نقاط)

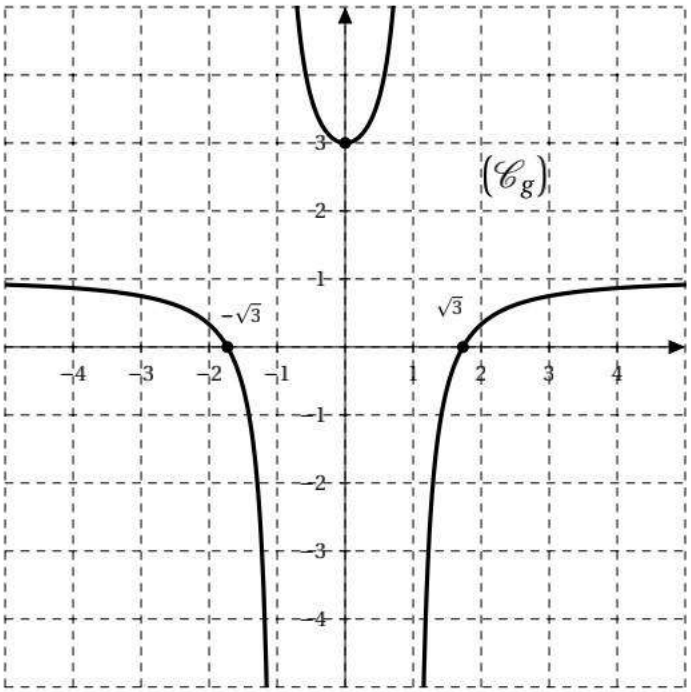
يُمثل الجدول الآتي تطور إنتاج مصنع الحديد خلال الفترة الممتدة من 2020 إلى 2024.

السنة	2020	2021	2022	2023	2024
ترتيب السنوات x_i	1	2	3	4	5
الإنتاج بالمليون طن y_i	4.8	5	5.5	6.2	7

1. عين إحداثيي النقطة المتوسطة G ثم مثل سحابة النقط $M(x_i\,;\,y_i)$ في معلم متعامد
(على محور الفواصل $1\,cm$ يُمثل رتبة واحدة وعلى محور التراتيب $1\,cm$ يُمثل 1 مليون طن)
2. جِد معادلة للمستقيم (Δ) ، مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا للسلسلة $M(x_i\,;\,y_i)$ (تُعطى النتيجة مُدورة إلى 10^{-2})
3. هل يُمكن للمصنع الوصول لإنتاج يفُوق 8.45 مليون طُن في سنة 2027 بهذا التعديل الخطي ؟ برر صحة إجابتك .
4. إبتداءاً من أي سنة يتعدى إنتاج المصنع 10.17 مليون طُن في السنة ؟

التمرين الرابع:(08 نقاط)

I) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\,;\,1\}$ بـ : $g(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$ و $(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني كما هو موضح في الشكل أسفله .



بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية :

1. حَدِد إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}-\{-1\,;\,1\}$
2. عين كلا من $g'(0)$ ، $g(-\sqrt{3})$ و $g(\sqrt{3})$
3. عين النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

II) نعتبر الدالة f المُعرفة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس .

1. أ) أحسب كلا من $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)$ وَ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$
ثم فسر النتيجتين هندسياً .

ب) أحسب كلا من $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ج) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x$ مقارب مائل لـ $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

2. أ) بين من أجل كل $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ أن : $f'(x)=g(x)$.
ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أنشئ كلا من (Δ) و $(\mathscr{C}_f)$ في نفس المعلم (نأخذ : $f(\sqrt{3})\simeq 3$ وَ $f(-\sqrt{3})\simeq -3$)

4. F دالة مُعرفة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2+(x+1)\ln(x+1)-(x-1)\ln(x-1)$

أ) بين أن F دالة أصلية لـ f على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

ب) أُحسب مساحة الحيز $\mathscr{A}$ المحصورة بين $(\mathscr{C}_f)$ ومحور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما : $x=2$ و $x=3$

5. نعتبر الدالة u المُعرفة على $]-\infty\,;\,-1[\cup]1\,;\,+\infty[$ بـ : $u(x)=|f(x)|$ و $(\mathscr{C}_u)$ تمثيلها البياني .

أ) بين أن الدالة u زوجية .

ب) إشرح كيفية رسم $(\mathscr{C}_u)$ إنطلاقا من $(\mathscr{C}_f)$.

حل التمرين الأول :

1. تحديد إشارة $h(x)$: 0.75ن

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$		$+$	

2. كتابة معادلة المقارب المائل (Δ) : 0.75ن

لدينا : $(\Delta): y = ax + b$ حيث :

$a = \dfrac{-3-(-2)}{0-1} = 1$ و: $b = -3 - a \times 0 = -3$

وبالتالي : $\boxed{(\Delta): y = x - 3}$

3. تعيين إشارة $h'(x)$: 0.75ن

لدينا h متزايدة تماما على $]-\infty;1[$ معناه : $h'(x) > 0$

ولدينا h متناقصة تماما على $]1;3]$ معناه : $h'(x) < 0$

ولدينا أيضا h متزايدة تماما على $[3;+\infty[$ معناه : $h'(x) > 0$ وبالتالي نستنتج :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$		$-$	0	$+$	

4. حل المعادلة : 0.50ن

$h(x) \times h'(x) = 0$ معناه : $\begin{cases} h(x) = 0 \\ h'(x) = 0 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} x = \alpha \\ x = 3 \end{cases}$ وبالتالي حلول المعادلة هي :

$\boxed{S = \{\alpha\ ;\ 3\}}$

5. المناقشة البيانية : 0.50ن

لدينا : $h(x) = x + m$ معناه حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع $(\mathscr{C}_h)$ مع المستقيم المائل ذو المعادلة $y = x + m$ وبالتالي :

- إذا كان : $\boxed{m \le -3}$ فإن المعادلة لا تقبل حلول
- إذا كان : $\boxed{m > -3}$ فإن المعادلة تقبل حلين .

6. تعيين اتجاه تغير H : 0.75ن

H دالة أصلية لـ h معناه : $\boxed{H'(x) = h(x)}$

ومنه إشارة $H'(x)$ من إشارة $h(x)$ وبالتالي :

- H متزايدة تماما على المجالين $[\alpha\ ;\ 1]$ و $]1\ ;\ +\infty[$
- H متناقصة تماما على المجال $]-\infty\ ;\ \alpha]$

حل التمرين الثاني :

1. أ) البرهان بالتراجع : 0.75ن

لنبرهن بالتراجع أن $u_n > -1$ مهما يكن $n \in \mathbb{N}$

التحقق :

لدينا من أجل $n = 0$: $u_0 = e^2 - 1 > -1$

وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n = 0$.

الفرضية :

نفرض أن : $u_n > -1$ من أجل العدد الطبيعي n.

الإثبات : لنبين أن $u_{n+1} > -1$.

لدينا من الفرضية : $u_n > -1$ ومنه بضرب طرفي المتباينة في العدد e^{-2} نجد :

$$e^{-2}u_n > -e^{-2}$$

ثم بإضافة العدد $e^{-2} - 1$ إلى طرفي المتباينة نجد :

$$e^{-2}u_n + e^{-2} - 1 > \cancel{-e^{-2}} + \cancel{e^{-2}} - 1$$

أي : $u_{n+1} > -1$ وبالتالي حسب مبدأ البرهان بالتراجع : $\boxed{n \in \mathbb{N} \text{ مهما يكن } u_n > -1}$

1.ب) دراسة اتجاه تغير $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: 0.50ن

لدينا : $u_{n+1} - u_n = e^{-2}u_n + e^{-2} - 1 - u_n$

$= \boxed{(e^{-2} - 1)u_n + e^{-2} - 1}$

ولدينا مماسبق : $u_n > -1$ ومنه بضرب طرفي المتباينة في العدد السالب $e^{-2} - 1$ نجد :

$$(e^{-2} - 1)u_n < -e^{-2} + 1$$

ثم بإضافة العدد $e^{-2} - 1$ إلى طرفي المتباينة نجد :

$$(e^{-2} - 1)u_n + e^{-2} - 1 < \cancel{-e^{-2}} + \cancel{1} + \cancel{e^{-2}} - \cancel{1}$$

أي : $(e^{-2} - 1)u_n + e^{-2} - 1 < 0$

وبالتالي نستنتج أن : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ متناقصة تماما}}$

1.ج) تبرير تقارب $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: 0.25ن

بما أن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة تماما و محدودة من الأسفل بالعدد -1 فإن : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ متقاربة}}$

2.أ) إثبات أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية : 0.50ن

لدينا : $v_{n+1} = 3u_{n+1} + 3$

$= 3e^{-2}u_n + 3e^{-2} - \cancel{3} + \cancel{3}$

$= e^{-2}(3u_n + 3) = \boxed{e^{-2}v_n}$

وبالتالي $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها : $q = e^{-2}$

حساب الحد الأول v_0 : 0.25ن

لدينا : $v_0 = 3u_0 + 3 = 3e^2 - 3 + 3 = \boxed{3e^2}$

2. ب) كتابة عبارة v_n بدلالة n : 0.50ن

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية معناه :

$$v_n = v_0 \times q^n = 3e^2\left(e^{-2}\right)^n = \boxed{3e^{2-2n}}$$

عبارة الحد العام لـ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: 0.50ن

لدينا : $v_n = 3u_n + 3$ ومنه : $3u_n = v_n - 3$

أي : $u_n = \frac{1}{3}v_n - 1$ وبالتالي : $u_n = \frac{1}{3}3e^{2-2n} - 1$

فيكون : $\boxed{u_n = e^{2-2n} - 1}$

حساب النهاية : 0.25ن

لدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{2-2n}\ (\to 0) - 1 = \boxed{-1}$

3. تبيان صحة المجموع S_n : 0.50ن

$$\begin{aligned}
S_n &= \ln v_0 + \ln v_1 + \cdots\cdots + \ln v_n \\
&= \ln(v_0 \times v_1 \times \cdots\cdots \times v_n) \\
&= \ln\left(3e^{2-2(0)} \times 3e^{2-2(1)} \times \cdots \times 3e^{2-2n}\right) \\
&= \ln\left(3^{n+1} \times e^{2-2(0)+2-2(1)+\cdots\cdots+2-2n}\right) \\
&= \ln 3^{n+1} + \ln\left(e^{2-2(0)+2-2(1)+\cdots+2-2n}\right) \\
&= (n+1)\ln 3 + 2(n+1) - 2(1+2+\cdots+n) \\
&= (n+1)\ln 3 + 2(n+1) - 2\frac{n}{2}(1+n) \\
&= \boxed{(n+1)(\ln 3 + 2 - n)}
\end{aligned}$$

حل التمرين الثالث :

1.أ) التحقق من صحة المساواة : 0.25ن

$$\begin{aligned}
&(X-5)(X^2+6X+8) \\
&= X^3 + 6X^2 + 8X - 5X^2 - 30X - 40 \\
&= X^3 + X^2 - 22X - 40 = P(X)
\end{aligned}$$

1. ب) حل المعادلة $P(X) = 0$: ..... 0.25 × 3ن

$P(X) = 0$ معناه : $\begin{cases} X - 5 = 0 \cdots (\blacktriangle) \\ X^2 + 6X + 8 = 0 \cdots (\blacktriangledown) \end{cases}$

ومن (▲) لدينا : $\boxed{X = 5}$

ومن (▼) لدينا : $\Delta = 36 - 4(1)(8) = 4 > 0$

ومنه المعادلة (▼) تقبل حلين هما :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-2}{2} = \boxed{-4}$$

$$X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+2}{2} = \boxed{-2}$$

1.ج) استنتاج إشارة $P(X)$: 0.75ن

x	$-\infty$		-4		-2		5		$+\infty$
$X-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
X^2+6X+8		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$P(X)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2. حل المعادلة (★) : 0.50ن

بوضع : $e^x = X$ المعادلة (★) تصبح : $P(X) = 0$

❖ وعليه من أجل : $X = 5$ لدينا : $e^x = 5$ ومنه :

$\boxed{x = \ln 5}$

❖ من أجل : $X = -4$ لدينا : $e^x = -4$

(مستحيل لأن : $e^x > 0$)

❖ من أجل : $X = -2$ لدينا : $e^x = -2$

(مستحيل لأن : $e^x > 0$)

3. استنتاج حلول المعادلة (♣) : ..... 0.25 × 4ن

بوضع : $\ln x = X$ المعادلة (♣) تصبح : $P(X) = 0$

❖ من أجل $X = 5$ لدينا : $\ln x = 5$ ومنه :

$\boxed{x = e^5}$

❖ من أجل $X = -2$ لدينا : $\ln x = -2$ ومنه :

$\boxed{x = e^{-2}}$

❖ من أجل $X = -4$ لدينا : $\ln x = -4$ ومنه :

$\boxed{x = e^{-4}}$

4. حل المتراجحة (♠) : 0.75ن

لدينا المتراجحة (♠) تكافئ :

$\log(x^3 + x^2 - 22x - 39) > \log 1$

ومنه يصبح لدينا : $x^3 + x^2 - 22x - 39 > 1$

أي : $x^3 + x^2 - 22x - 40 > 0$

وبالتالي حسب جدول الإشارة السابق يكون لدينا :

$S =]-4\ ;\ -2[\cup]5\ ;\ +\infty[\cap [-4\ ;\ -2]$

$= \boxed{]-4\ ;\ -2[}$

حل التمرين الرابع :

1. حساب $g(0)$: 0.25ن

لدينا : $g(0) = -0e^{-0} = 0 \times 1 = \boxed{0}$

2. استنتاج إشارة $g(x)$: 0.25ن

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0	$-$

1. حساب النهاية وتفسيرها هندسيا : .. 2×0.25ن

لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \cancel{xe^{-x}}^{0} + \cancel{e^{-x}}^{0} = \boxed{0}$

$(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته : $\boxed{y = 0}$

2.أ) حساب الدالة المشتقة $f'(x)$: 0.25ن

f قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ حيث :

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} - e^{-x} = -xe^{-x} = \boxed{g(x)}$

2.ب) استنتاج اتجاه تغير f : 0.25ن

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

وبالتالي f متناقصة تماما على $[0;+\infty[$

جدول التغيرات: 0.50ن

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$
$f(x)$	1 ↘	0

3. معادلة المماس $(\mathscr{T})$: ..... 0.25 + 0.25ن

لدينا : $(\mathscr{T}) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

حيث : $f(1) = e^{-1} + e^{-1} = 2e^{-1}$

و: $f'(1) = g(1) = \dfrac{-1}{e}$

وبالتالي : $y = \dfrac{-1}{e}x + \dfrac{1}{e} + 2e^{-1}$

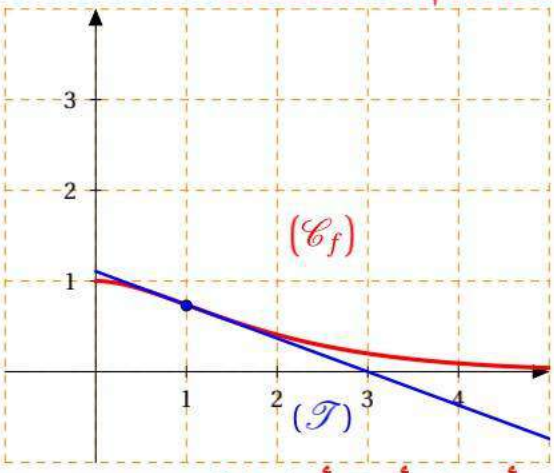
أي : $\boxed{(\mathscr{T}) : y = -e^{-1}x + 3e^{-1}}$

4.ب) المناقشة البيانية : 0.75ن

حلول المعادلة $f(x) = m$ بيانيا معناه إيجاد فواصل نقط تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم الأفقي $y = m$ وبالتالي

- إذا كان : $m \leq 0$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .
- إذا كان : $0 < m \leq 1$ المعادلة تقبل حل واحد
- إذا كان : $m > 1$ فإن المعادلة لا تقبل حلول .

4.أ) رسم $(\mathscr{T})$ و $(\mathscr{C}_f)$: ..... 0.25 + 0.50ن



5.أ) تبيان أن F أصلية لـ f : 0.50ن

F قابلة للإشتقاق على $[0;+\infty[$ حيث :

$F'(x) = -e^{-x} + xe^{-x} + 2e^{-x} = xe^{-x} + e^{-x}$

$= \boxed{f(x)}$

5.ب) حساب المساحة $\mathscr{A}$ بـ cm^2 : 01ن

$\mathscr{A} = 4cm^2 \times \int_1^2 f(x)\,dx$

$= 4\left[F(2) - F(1)\right]$

$= 4\left[-4e^{-2} + 4 + 3e^{-1} - 4\right]$

$= \left(12e^{-1} - 16e^{-2}\right)\ cm^2$

$\simeq \boxed{2.24\ cm^2}$

6.أ) عبارة الكلفة الإجمالية : 01.5ن

لدينا : $C'_T(q) = C_m(q)$ ومنه نستنتج أن :

$C_T(q) = -qe^{-q} - 2e^{-q} + k$

حيث k عدد حقيقي ثابت .

ولدينا أيضا : $C_T(2) = 3.45$ أي :

$-2e^{-2} - 2e^{-2} + k = 3.45$

وعليه : $k = 3.45 + 4e^{-2} \simeq 4$ فتكون :

$\boxed{C_T(q) = -qe^{-q} - 2e^{-q} + 4}$

6.ب) حساب القيمة المتوسطة : 01ن

$\dfrac{1}{2-1}\int_1^2 C_m(q)\,dq = C_T(2) - C_T(1)$

$= -4e^{-2} + \cancel{4} + 3e^{-1} - \cancel{4}$

$= 3e^{-1} - 4e^{-2}$

$\simeq \boxed{0.56}$

حل التمرين الأول :

1. تحديد إشارة $h(x)$: 0.75ن

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	

2. المقارنة بين العددين : 0.75ن

لدينا : $2026 > 2025$

ومنه بقلب طرفي المتباينة نجد : $\frac{1}{2026} < \frac{1}{2025}$

ثم بتركيب طرفي المتباينة مع الدالة f المتزايدة تماما على $]-\infty;1[$ نجد :

$$f\left(\frac{1}{2026}\right) < f\left(\frac{1}{2025}\right)$$

3. حل المعادلة : 0.75ن

لدينا : $\Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16 > 0$

ومنه المعادلة تقبل حلين هما :

$h(x) = \frac{-2-4}{2\times 1} = \boxed{-3}$.

أو : $h(x) = \frac{-2+4}{2\times 1} = \boxed{1}$

❖ من أجل : $h(x) = -3$ نجد : $x = -1$

❖ من أجل $h(x) = 1$ نجد : $x = 3$ أو : $x = 0$

وبالتالي حلول المعادلة هي : $\boxed{S = \{-1\,;0\,;3\}}$

4. معادلة المماس $(\mathscr{T})$: 0.50ن

لدينا : $(\mathscr{T}) : y = h'(3)(x-3) + h(3)$

حيث : $h(3) = 1$ و : $h'(3) = 0$

وبالتالي : $\boxed{(\mathscr{T}) : y = 1}$

5. تعيين قيم الوسيط m : 0.50ن

حلول المعادلة : $h(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع $(\mathscr{C}_h)$ مع المستقيم الأفقي ذو المعادلة : $y = m$ وعليه

من أجل : $\boxed{m > 1}$ المعادلة تقبل ثلاث حلول موجبة .

6. تعيين اتجاه تغير H : 0.75ن

H دالة أصلية لـ h معناه : $\boxed{H'(x) = h(x)}$

وبالتالي إشارة $H'(x)$ من إشارة $h(x)$ فتكون :

❖ H متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha[$.

❖ H متزايدة تماما على المجالين $[\alpha;1[$ و $]1;+\infty[$

حل التمرين الثاني :

1. تبيان أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ لا حسابية ولا هندسية :

لدينا :

$u_1 = 0.4u_0 + 1.2 = 0.4(30) + 12 = \boxed{24}$

و:

$u_2 = 0.4u_1 + 12 = 0.4(24) + 12 = \boxed{21.6}$

ومنه : $u_1 - u_0 = 24 - 30 = \boxed{-6}$

و : $u_2 - u_1 = 21.6 - 24 = \boxed{-2.4}$

أي : $\boxed{u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0}$ ..... 3×0.25ن

فتكون $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست متتالية حسابية .

ولدينا : $\frac{u_1}{u_0} = \frac{24}{30} = \boxed{0.8}$

و : $\frac{u_2}{u_1} = \frac{21.6}{24} = \boxed{0.9}$

أي : $\boxed{\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}}$ 0.25ن

فتكون $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست متتالية هندسية .

2. البرهان أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية : $2\times 0.25 + 0.5$ن

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 20 \\ &= 0.4u_n + 12 - 20 = 0.4u_n - 8 \\ &= 0.4\left(u_n - \frac{8}{0.4}\right) \\ &= 0.4\,(u_n - 20) = \boxed{0.4v_n} \end{aligned}$$

ومنه $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها : $q = 0.4$

الحد الأول : $v_0 = u_0 - 20 = 30 - 20 = \boxed{10}$

عبارة الحد العام : $v_n = v_0 \times q^n = \boxed{10\times(0.4)^n}$

3. عبارة u_n بدلالة n : 0.25ن

لدينا : $v_n = u_n - 20$ ومنه : $u_n = v_n + 20$

أي : $\boxed{u_n = 10\times(0.4)^n + 20}$

حساب النهاية : 0.25ن

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 10\times\underbrace{(0.4)^n}_{\to 0} + 20 = \boxed{20}$

1. عدد الطلاب في 2019 وفي 2020 : 2×0.25ن

لدينا u_1 عدد الطلاب سنة 2019 وبالتالي :

$$u_1 = u_0\left(1-\frac{60}{100}\right)+12$$
$$= 30\times 0.4+12 = 24$$

أي عدد الطلاب في سنة 2019 هو : 2400 طالب

ولدينا u_2 عدد الطلاب سنة 2020 وبالتالي :

$$u_2 = u_1\left(1-\frac{60}{100}\right)+12$$
$$= 24\times 0.4+12 = 21.6$$

أي عدد الطلاب في سنة 2020 هو : 2160 طالب

2.أ) التحقق من عدد الطلاب في $n+1$: 0.25ن.

لدينا : $u_{n+1} = u_n\left(1-\frac{60}{100}\right)+12$

$$= \boxed{u_n\times 0.4+12}$$

2.ب) تبيان أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متناقصة تماما : ... 0.50ن

$$u_{n+1}-u_n = 0.4u_n+12-u_n$$
$$= (0.4-1)u_n+12$$
$$= -0.6\left(10\times(0.4)^n+20\right)+12$$
$$= -6\times(0.4)^n-\cancel{12}+\cancel{12}$$
$$= \boxed{-6\times(0.4)^n<0}$$

فتكون $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متناقصة تماما .

2.ج) عدد الطلاب 200 طالب ؟ 0.25ن

لدينا مماسبق : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 20$ أي عدد الطلاب يقترب إلى 2000 طالب في السنة n ولا يمكن أن يصل إلى 2000 طالب مهما تكون السنة n.

حل التمرين الثالث :

1. تعيين إحداثيي النقطة المتوسطة G : 0.5+0.5ن

لدينا :

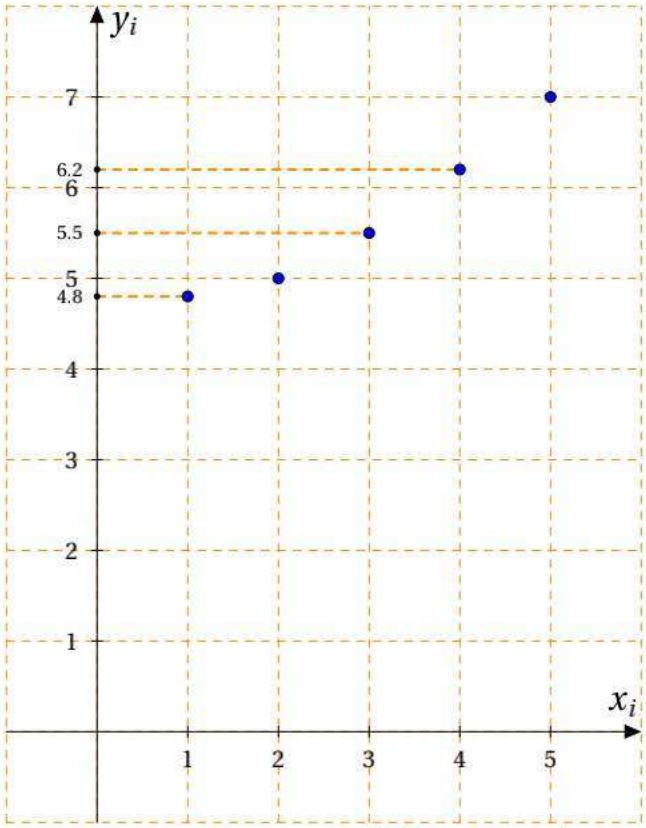
$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{i=5} x_i}{N} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = \boxed{3}$$

ولدينا :

$$\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{i=5} y_i}{N} = \frac{4.8+5+5.5+6.2+7}{5} = \boxed{5.7}$$

وبالتالي : $\boxed{G(3\ ;\ 5.7)}$

تمثيل سحابة النقط : 01ن



2. معادلة مستقيم الإنحدار (Δ) : 0.50+0.50ن.

لدينا : $(\Delta): y = ax+b$ حيث :

$$a = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=5} x_i\times y_i - \overline{X}\times\overline{Y}}{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=5}\left(x_i-\overline{X}\right)^2}$$

وعليه نحسب مايلي :

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4.8	5	5.5	6.2	7
$x_i\times y_i$	4.8	10	16.5	24.8	35
$x_i-\overline{X}$	−2	−1	0	1	2
$\left(x_i-\overline{X}\right)^2$	4	1	0	1	4

فيكون : $a = \frac{18.22-17.1}{2} = \boxed{0.56}$

و: $b = \overline{Y}-a\overline{X} = 5.7-(0.56)(3) = \boxed{4.02}$

وبالتالي معادلة مستقيم الإنحدار هي :

$$\boxed{(\Delta): y = 0.56x+4.02}$$

3. الإنتاج في سنة 2027 : 0.50ن

لدينا رتبة سنة 2027 هي : 8 وبالتالي :

$$y = 0.56 \times 8 + 4.02 = \boxed{8.5}$$

وعليه يمكن للمصنع أن يصل لإنتاج يفُوق 8.45 مليون طن في سنة 2027.

4. السنة التي يتعدى فيها الإنتاج 10.17 : . 0.50ن

لدينا : $y = 10.17$ معناه : $0.56x + 4.02 = 10.17$

ومنه : $0.56x = 6.15$ أي : $\boxed{x = 10.98}$ وبالتالي

السنة التي رتبتها 10 هي $\boxed{2029}$ فتكون هذه الأخيرة السنة التي يتعدى فيها الإنتاج 10.27 مليون طن .

حل التمرين الرابع :

1. تحديد إشارة $g(x)$: 0.50ن

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$-$	0	$+$	

2. حساب الصور : ..... 0.25 + 0.25 + 0.25ن

❖ بقراءة بيانية لدينا : $g'(0) = \boxed{0}$

لأن $(\mathscr{C}_g)$ يقبل مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة التي فاصلتها 0

❖ بقراءة بيانية لدينا :

$$g(\sqrt{3}) = \boxed{0} \text{ و } g(-\sqrt{3}) = \boxed{0}$$

لأن $(\mathscr{C}_g)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$

3. تعيين نهايتي g عند $+\infty$ و $-\infty$: . 2 × 0.25ن

بقراءة بيانية لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{1} \text{ و } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{1}$$

لأن $(\mathscr{C}_g)$ يقبل مستقيم مُقارب أفقي معادلته $y = 1$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

1.أ) حساب النهايتين و تفسيرهما : .... 3 × 0.25ن

❖ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} x + \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \boxed{+\infty}$

لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

و : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

❖ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} x + \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \boxed{-\infty}$

لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{0^-}{-2} = +\infty$

❖ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين عموديين معادلتهما $\boxed{x=1}$ و $\boxed{x=-1}$

1.ب) حساب نهايتي f عند $+\infty$ و $-\infty$: 0.50ن

❖ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \boxed{+\infty}$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

و : $\lim\limits_{x\to1} \ln(x) = 0$

❖ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \boxed{-\infty}$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

1.ج) تبيان أن (Δ) مقارب مائل : 0.25ن

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) - y = \lim_{|x|\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$= \lim_{|x|\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x}\right) = \boxed{0}$$

ومنه (Δ) مقارب مائل لـ $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

2.أ) حساب $f'(x)$: 0.50ن

f قابلة للإشتقاق على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ حيث

$$f'(x) = 1 + \frac{\dfrac{-2}{(x-1)^2}}{\dfrac{x+1}{x-1}} = 1 - \frac{2}{x^2-1^2}$$

$$= \frac{x^2-1-2}{x^2-1} = \frac{x^2-3}{x^2-1} = \boxed{g(x)}$$

2.ب) استنتاج اتجاه تغير f : ..... 3 × 0.25ن

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وبالتالي :

❖ f مُتزايدة تماما على المجالين :

$$[\sqrt{3}\ ;\ +\infty[\text{ و }]-\infty\ ;\ -\sqrt{3}]$$

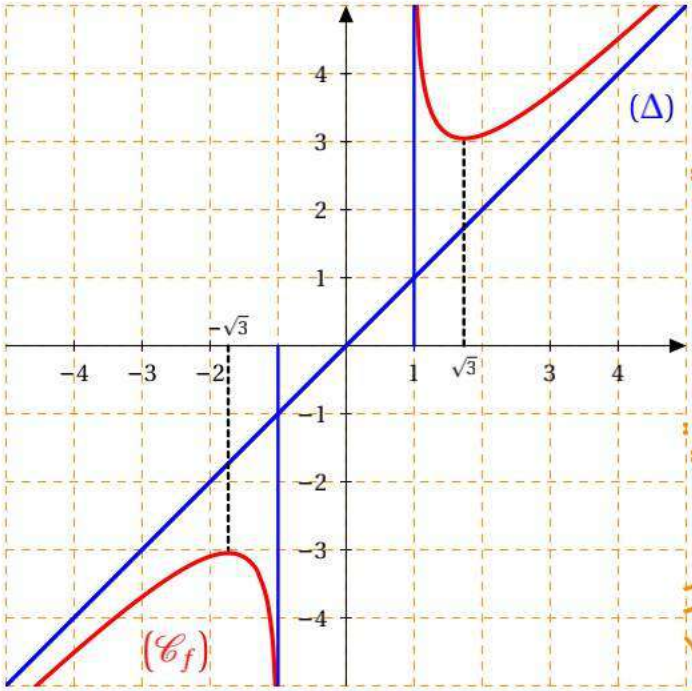
❖ f مُتناقصة تماما على المجالين :

$$]1\ ;\ \sqrt{3}] \text{ و } [-\sqrt{3}\ ;\ -1[$$

جدول التغيرات : 0.50ن

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	‖	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	‖	‖	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

3. إنشاء (Δ) و $(\mathscr{C}_f)$: ..... 0.25 + 0.50ن



4.أ) تبيان أن F دالة أصلية لـ f : 0.50ن

F قابلة للإشتقاق على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

حيث : $\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)'=x$

و: $\left[(x+1)\ln(x+1)\right]'=1+\ln(x+1)$

و: $\left[(x-1)\ln(x-1)\right]'=1+\ln(x-1)$

ومنه بجمع ثم طرح المساويات السابقة نجد :

$$F'(x) = x+\cancel{1}+\ln(x+1)-\cancel{1}-\ln(x-1)$$
$$= x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\boxed{f(x)}$$

أي F دالة أصلية لـ f على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

4.ب) حساب المساحة $\mathscr{A}$: 0.50ن

$$\mathscr{A} = \int_2^3 f(x)\,dx$$
$$= F(3)-F(2)$$
$$= \left(\frac{5}{2}+4\ln(4)-2\ln(2)\right)-\left(3\ln(3)-\ln(1)\right)$$
$$= \frac{5}{2}+\ln(64)-\ln(27)$$
$$= \left(\frac{5}{2}+\ln\left(\frac{64}{27}\right)\right)\ UA$$
$$\simeq \boxed{3.36\ UA}$$

5.أ) تبيان أن u دالة زوجية : 0.75ن

نضع فيمايلي : $D=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

ومنه من أجل : $x\in D$ لدينا : $-x\in D$

و: $u(-x)=|f(-x)|$

حيث : $f(-x) = -x+\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)$

$$= -\left[x-\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)\right]$$
$$= -\left[x+\ln\left(\frac{1}{\frac{-x+1}{-x-1}}\right)\right]$$
$$= -\left[x+\ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right)\right]$$
$$= -\left[x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]$$
$$= \boxed{-f(x)}$$

أي : $u(-x)=|-f(x)|=|f(x)|=u(x)$

فتكون u دالة زوجية .

5.ب) شرح كيفية رسم $(\mathscr{C}_u)$: 0.50ن

لدينا : $u(x)=f(x)$ من أجل : $f(x)\geq 0$ أي :

- من أجل $x\in]1;+\infty[$ يكون $(\mathscr{C}_u)$ منطبق على المنحنى $(\mathscr{C}_f)$
- من أجل $x\in]-\infty;-1[$ يكون $(\mathscr{C}_u)$ نظير $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة لمحور التراتيب لأن الدالة u زوجية