الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية
دورة أفريل 2025
الشعبة: تسيير واقتصاد
المادة: الرياضيات
المدّة: 3 ساعات و 30 د

امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشّح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كلّ حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

1. القيمة المتوسطة للدّالة $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ على المجال $[0;1]$ هي

أ) $\ln 2$ ب) $\ln 4$ ج) e^2

2. الدّالة العددية h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = \dfrac{x}{e^x + e^{-x}}$ هي دالة

أ) زوجية ب) فردية ج) لا زوجية ولا فردية

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x+e}{x-e}\right)$ تساوي

أ) 0 ب) 1 ج) e

4. مجموعة حلول المعادلة $(\ln x)^2 = 3\ln x - 2$ ذات المجهول الحقيقي x هي

أ) $\{1;2\}$ ب) $\{e;e^3\}$ ج) $\{e;e^2\}$

التمرين الثاني (4 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرّفة بـ $U_0 = 6$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = \dfrac{1}{4}U_n + 3$

I) **1.** أحسب كُلّا من U_1 و U_2

2. أ. برهن بالتّراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n > 4$

ب. بيّن أنّ المتتالية (U_n) متناقصة تماما، ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

II) المتتالية العددية (V_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = U_n - 4$

1. أ. بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$ ثمّ اُكتب عبارة V_n بدلالة n

ب. بيّن أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$ ثمّ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2. من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع ما يلي

$P_n = V_0 \times V_1 \times \cdots \times V_n$ و $T_n = \ln(U_0 - 4) + \ln(U_1 - 4) + \cdots + \ln(U_n - 4)$

أ. أُحسب P_n بدلالة n

ب. استنتج أنه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $T_n = (1+n)(1-n)\ln 2$

التمرين الثالث (4 ن)

الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

1. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f(x) = (x-2)(x^2 - 4x + 3)$

ب. أُدرس إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

2. أ. حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة : $e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6 = 0$

ب. استنتج في $\mathbb{R}$ مجموعة حلولة المتراجحة : $f(e^x) \geq 0$

3. حلّ في المجال $]-2;+\infty[$ المعادلة : $[\log(x+2)]^2 + 3 = 4\log(x+2)$

التمرين الرّابع (8 ن)

الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = xe^x - 1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. (وحدة الطول هي $1cm$)

1. أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ثمّ أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x) = (x+1)e^x$

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f على $\mathbb{R}$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3. أ. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0,5 < \alpha < 0,6$

ب. استنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

4. أ. أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

ب. أُدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T)

5. أ. أنشئ كُلّا من (T) و (C_f)

ب. عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ حلّين بالضّبط.

6. $\mathcal{S}(\alpha)$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = \alpha$

أ. بيّن أنّ $F : x \mapsto (x-1)e^x - x$ دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$

ب. استنتج أنّ $\mathcal{S}(\alpha) = (e^\alpha + \alpha - 2)\ cm^2$

انتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

الجدول المقابل هو جدول تغيّرات الدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = (ax+2)\,e^{-x}$ حيث a عدد حقيقي ثابت.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0

(C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس.

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير في كلّ حالة من الحالات الآتية.

1) حامل محور الفواصل مقارب لـ (C_g) عند $+\infty$

2) النقطة $A(5;-2)$ تنتمي إلى (C_g)

3) المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا.

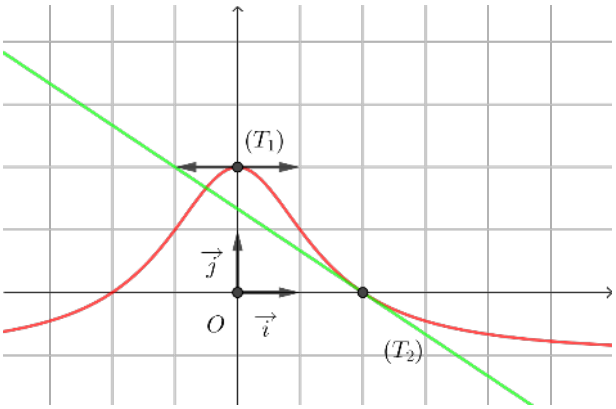
4) قيمة العدد الحقيقي a هي 2

التمرين الثاني (4 ن)

الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x) = \dfrac{ax^2+b}{x^2+2}$ حيث a ، b عددان حقيقيان ثابتان.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

وليكن (T_1) و (T_2) المماسين لـ (C_f) في كلّ من النقطتين اللّتين فاصلتيهما 0 و 2 على الترتيب كما هو مبيّن في الشكل المقابل.



1. بيّن أنّ الدّالة f زوجية.
2. بقراءة بيانية:
   أ. عيّن كلّا من $f(2)$ ، $f'(0)$ و $f'(2)$
   ب. أُكتب معادلة للمماس (T_2)
   ج. بيّن أنّ $b=4$ و $a=-1$
3. الدّالة العددية h معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = f(x-1)+2$
   • اشرح كيفية إنشاء المنحنى الممثّل للدّالة h انطلاقا من (C_f) (لا يُطلب الإنشاء).

التمرين الثالث (4 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرّفة بـ $U_0 = 3$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = \dfrac{4}{5}U_n + 1$

I) 1. أُحسب كُلّا من U_1 و U_2

2. أ. برهن بالتّراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n < 5$

ب. بيّن أنّ المتتالية (U_n) متزايدة تماما، ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

II) المتتالية العددية (V_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = U_n - 5$

1. أ. بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\dfrac{4}{5}$ يُطلب تعيين حدّها الأوّل V_0

ب. عيّن عبارة الحدّ العام V_n بدلالة n ، ثمّ استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n = -2\left(\frac{4}{5}\right)^n + 5$

ج. أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2. من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ و $T_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

أ. أُحسب S_n بدلالة n.

ب. استنتج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $T_n = 5n + 8\left(\frac{4}{5}\right)^n - 5$

التمرين الرّابع (8 ن)

I) الدّالة العددية g معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 2 + 2\ln x$

1. بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

2. أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,2 < \alpha < 1,3$

ب. استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

II) الدالة العددية f معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = x - \frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (وحدة الطول هي $1cm$)

1. أُحسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا، ثمّ أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. أ. بيّن أنّه: من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب. استنتج أنّ f متناقصة تماما على $]0;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3. أ. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f)

ب. أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

4. أُكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1

5. أنشئ كلّا من (Δ) ، (T) و (C_f). (نأخذ $f(\alpha) \approx 0,9$)

6. الدّالة العددية H معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $H(x) = (\ln x)^2$

أ. بيّن أنّه: من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ ، $H'(x) = x - f(x)$

ب. استنتج بالسنتيمتر المربّع قيمة $\mathcal{S}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات $y = x$ ، $x = 1$ و $x = e$

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية

امتحان البكالوريا التجريبي

دورة أفريل 2025
الشعبة: تسيير واقتصاد
المادة: رياضيات
المدّة: 3 ساعات ونصف

الإجابة النموذجية + سلّم التنقيط

شكر وعرفان

خالص التقدير والامتنان للطالبين رضوان أحمودة وآمنة العايب على إسهاماتهما الاستثنائية في تنقيح الإجابة النموذجية، وكذلك باقة من الشّكر والعرفان للطلبة الآتية أسماؤهم على جهودهم المبذولة خلال عملية التصحيح وأيضاً على ملاحظاتهم القيّمة التي ساهمت في إنجاز هذا العمل لفائدة التلاميذ المُقبلين على امتحان شهادة البكالوريا.

- عمرة طويل
- منال حجاج
- منال مصطفى شبرة
- يمينة حامدي
- رميصاء بن ساسية
- دعاء عرعار
- إيناس بروج
- لؤي دغوم
- فضيلة دودو
- ماريا زايدي
- مريم بلعيفة
- معتز لصفر
- الشيماء بوزقاق
- بشرى حشيفة
- سلسبيل كريمه
- ملاك بن عمر
- منار عيادي
- نزيهة خليفة

رئيس لجنة التصحيح

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 نق)

1. الاقتراح الصحيح هو أ

التبرير

f مستمرة على المجال $[0;1]$ ، عندئذ القيمة المتوسطة للدّالة f على $[0;1]$ هي m حيث

$$m = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$= \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^1$$

$$= \ln\left(1^2+1\right) - \ln\left(0^2+1\right)$$

$$= \ln 2$$

2. الاقتراح الصحيح هو ب

التبرير

- $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى العدد 0
- من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$h(-x) = \frac{-x}{e^{-x}+e^x}$$

$$= -\frac{x}{e^x+e^{-x}}$$

$$= -h(x)$$

وعليه h دالة فردية.

3. الاقتراح الصحيح هو أ

التبرير

بما أنّ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+e}{x-e} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}$$

$$= 1$$

فإنّ

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+e}{x-e}\right) = \lim_{t\to 1}\ln t$$

$$= 0$$

4. الاقتراح الصحيح هو ج

التبرير

المعادلة معرّفة إذا وفقط إذا كان

$$x > 0$$

وعليه المجموعة المرجعية للمعادلة هي $]0;+\infty[$

ولدينا

$$(\ln x)^2 = 3\ln x - 2$$

وذلك يكافئ

$$(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$$

ويكافئ

$$\ln x = 2 \quad \text{أو} \quad \ln x = 1$$

ويكافئ

$$x = e^2 \quad \text{أو} \quad x = e^1$$

أي

$$x = e^2 \quad \text{أو} \quad x = e$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي S حيث

$$\begin{aligned} S &= \{e; e^2\} \cap]0; +\infty[\\ &= \{e; e^2\} \end{aligned}$$

■

التمرين الثاني (6 نق)

I) 1. حساب كُلّا من U_1 و U_2

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{4}U_0 + 3 \\ &= \frac{1}{4} \times 6 + 3 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{4}U_1 + 3 \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{9}{2} + 3 \\ &= \frac{33}{8} \end{aligned}$$

2. أ. البرهان بالتّراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n > 4$

- نرمز للخاصية " $U_n > 4$ " بالرمز $P(n)$.
- نتحقّق من صحّة $P(0)$

لدينا

$$U_0 = 6$$

ومنه

$$U_0 > 4$$

وعليه $P(0)$ صحيحة.

- من أجل عدد طبيعي كيفي k نفترض صحّة $P(k)$ ونبرهن صحّة $P(k+1)$.

لدينا

$$U_k > 4$$

ومنه

$$\frac{1}{4}U_k > 1$$

وعليه

$$\frac{1}{4}U_k + 3 > 1 + 3$$

أي

$$U_{k+1} > 4$$

وبالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

• وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي n.

ب. **تبيين أنّ المتتالية (U_n) متناقصة تماما، ثمّ استنتاج أنّها متقاربة.**

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{1}{4}U_n + 3 - U_n \\ &= \left(\frac{1}{4} - 1\right)U_n + 3 \\ &= -\frac{3}{4}U_n + 3 \end{aligned}$$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$U_n > 4$$

ومنه

$$-\frac{3}{4}U_n < -3$$

وعليه

$$-\frac{3}{4}U_n + 3 < -3 + 3$$

أي

$$U_{n+1} - U_n < 0$$

وبالتالي (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

استنتاج التقارب

لدينا

• (U_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

• من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $U_n > 4$ ، وعليه (U_n) محدودة من الأسفل بالعدد 4

وبالتالي (U_n) متقاربة.

II) 1. أ. تبيين أنّ المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ثمّ كتابة عبارة V_n بدلالة n

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - 4 \\ &= \frac{1}{4}U_n + 3 - 4 \\ &= \frac{1}{4}U_n - 1 \\ &= \frac{1}{4}(U_n - 4) \\ &= \frac{1}{4}V_n \end{aligned}$$

وبالتالي (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

ومن أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} V_n &= V_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-0} \\ &= (U_0 - 4)\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= (6-4)\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

ب. تبيين أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$ ثمّ استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$V_n = U_n - 4$$

وعليه

$$U_n = V_n + 4$$

وبالتالي

$$U_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$$

وبما أنّ $-1 < \frac{1}{4} < 1$ ، فإنّ $\lim \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ ، ومنه $\lim U_n = 4$

2. أ. حساب P_n بدلالة n

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} P_n &= V_0 \times V_1 \times \cdots \times V_n \\ &= V_0 \times V_0 q \times \cdots \times V_0 q^n \\ &= V_0 \times V_0 \times \cdots \times V_0 \times q \times q^2 \times \cdots \times q^n \\ &= V_0^{n+1} \times q^{1+2+\cdots+n} \\ &= 2^{n+1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

ب. استنتاج أنه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $T_n = (1+n)(1-n)\ln 2$

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} T_n &= \ln(U_0 - 4) + \ln(U_1 - 4) + \cdots + \ln(U_n - 4) \\ &= \ln V_0 + \ln V_1 + \cdots + \ln V_n \\ &= \ln(V_0 \times V_1 \times \cdots \times V_n) \\ &= \ln P_n \\ &= \ln\left[2^{n+1} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right] \\ &= \ln 2^{n+1} + \ln\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_n &= (n+1)\ln 2 - \frac{n(n+1)}{2}\ln 4 \\ &= (n+1)\ln 2 - \frac{n(n+1)}{2}\ln 2^2 \\ &= (n+1)\ln 2 - 2\times\frac{n(n+1)}{2}\ln 2 \\ &= (1+n)(1-n)\ln 2 \end{aligned}$$

■

التمرين الثالث (6 نق)

1. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$: $f(x) = (x-2)(x^2-4x+3)$

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)(x^2-4x+3) \\ &= x(x^2-4x+3) - 2(x^2-4x+3) \\ &= x^3 - 4x^2 + 3x - 2x^2 + 8x - 6 \\ &= x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \end{aligned}$$

ب. دراسة إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

المعادلة

$$f(x) = 0$$

تكافئ

$$(x-2)(x^2-4x+3) = 0$$

وتكافئ

$$x-2=0 \quad \text{أو} \quad x^2-4x+3=0$$

وتكافئ

$$x=2 \quad \text{أو} \quad x=1 \quad \text{أو} \quad x=3$$

وعندئذٍ لدينا

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4x+3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2. أ. حلّ المعادلة $e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6 = 0$ في $\mathbb{R}$

المعادلة

$$e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6 = 0$$

تكافئ

$$f(e^x) = 0$$

وتكافئ

$$e^x = 1 \quad \text{أو} \quad e^x = 2 \quad \text{أو} \quad e^x = 3$$

وتكافئ

$$x = \ln 1 \quad \text{أو} \quad x = \ln 2 \quad \text{أو} \quad x = \ln 3$$

أي

$$x = 0 \quad \text{أو} \quad x = \ln 2 \quad \text{أو} \quad x = \ln 3$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي S_1 حيث

$$S_1 = \{0; \ln 2; \ln 3\}$$

ب. استنتاج مجموعة حلول المتراجحة : $f(e^x) \geq 0$ في $\mathbb{R}$

$f(e^x) \geq 0$ تكافئ

$$e^x \geq 3 \quad \text{أو} \quad 1 \leq e^x \leq 2$$

وتكافئ

$$x \geq \ln 3 \quad \text{أو} \quad 0 \leq x \leq \ln 2$$

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة هي S_2 حيث

$$S_2 = [0; \ln 2] \cup [\ln 3; +\infty[$$

3. حلّ المعادلة : $[\log(x+2)]^2 + 3 = 4\log(x+2)$ في المجال $]-2; +\infty[$

المعادلة معرّفة إذا وفقط إذا كان

$$x + 2 > 0$$

أي

$$x > -2$$

ومنه المجموعة المرجعية للمعادلة هي المجال $]-2; +\infty[$ ولدينا

$$[\log(x+2)]^2 + 3 = 4\log(x+2)$$

وذلك يكافئ

$$[\log(x+2)]^2 - 4\log(x+2) + 3 = 0$$

وذلك يكافئ

$$\log(x+2) = 3 \quad \text{أو} \quad \log(x+2) = 1$$

وتكافئ

$$x + 2 = 10^3 \quad \text{أو} \quad x + 2 = 10$$

وتكافئ

$$x = 10^3 - 2 \quad \text{أو} \quad x = 10 - 2$$

أي

$$x = 998 \quad \text{أو} \quad x = 8$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي S_3 حيث

$$S_3 = \{8; 998\} \cap]-2; +\infty[$$
$$= \{8; 998\}$$

التمرين الرابع (8 نق)

1. حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا ثمّ حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (xe^x - 1)$$

لأنّ

$$\lim_{x \to -\infty} (xe^x) = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ والموازي لحامل محور الفواصل مقارب لـ (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (xe^x - 1) = +\infty$$

لأنّ $\lim_{x\to+\infty} (xe^x) = +\infty$

2. أ. تبيين أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x : $f'(x) = (x+1)\,e^x$

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$f'(x) = 1 \times e^x + e^x \times x = (x+1)\,e^x$$

ب. استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f على $\mathbb{R}$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها.

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$e^x > 0$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة e^x وعندئذ لدينا

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

- $f'(x) > 0$ على $]-\infty;-1[$ و $f'(-1) = 0$ ومنه f متزايدة تماما على $]-\infty;-1]$
- $f'(x) < 0$ على $]-1;+\infty[$ و $f'(-1) = 0$ ومنه f متناقصة تماما على $[-1;+\infty[$

وعندئذ نشكّل جدول تغيّراتها كما يلي

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-e^{-1}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

3. أ. تبيين أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0,5 < \alpha < 0,6$

- $f(x) < 0$ على $]-\infty;-1]$
- f مستمرة على $[-1;+\infty[$
- f متزايدة تماما على $[-1;+\infty[$
- لدينا

$$f(0,6) \approx 0,09 \qquad f(0,5) \approx -0,18$$

ومنه $f(0,5) \times f(0,6) < 0$

عندئذ نستنتج أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $0,5 < \alpha < 0,6$.

ب. استنتاج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

- $f(x) < 0$ على $]-\infty;-1]$
- f متزايدة تماما على $[-1;+\infty[$
- $f(\alpha) = 0$

عندئذ لدينا

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

4. أ. كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

f قابلة للاشتقاق عند 0 ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $f'(0)$ حيث

$$(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

ولدينا

$$f(0) = -1 \qquad | \qquad f'(0) = 1$$

وبالتالي

$$(T) : y = x - 1$$

ب. دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T)

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned} f(x) - (x-1) &= xe^x - 1 - x + 1 \\ &= xe^x - x \\ &= (e^x - 1)\, x \end{aligned}$$

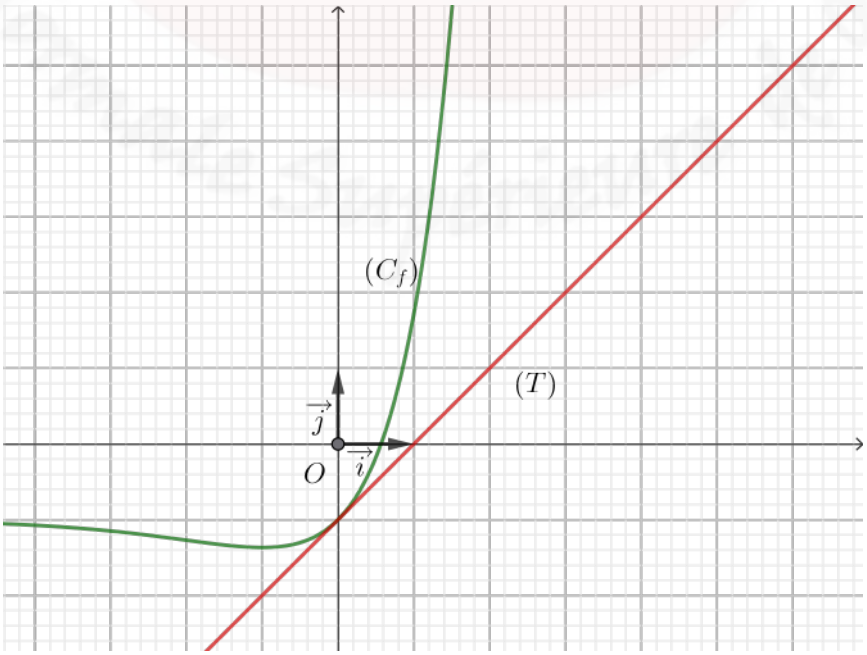
وعندئذ لدينا

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$f(x) - (x-1)$		$+$	0	$+$	

وبالتالي

- (C_f) يقع فوق (T) على $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
- (C_f) يقطع (T) في النقطة $A\,(0; -1)$

5. أ. إنشاء كُلّا من (T) و (C_f)



ب. **تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين بالضّبط.**

حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم (Δ_m) حيث

$$(\Delta_m): y=x+m$$

- من أجل $m<-1$ المعادلة ليس لها حلول
- من أجل $m=-1$ المعادلة تقبل حلّا واحداً.
- من أجل $m>-1$ المعادلة تقبل حلّين بالضّبط.

وبالتالي مجموعة قيم m التي تقبل من أجلها المعادلة حلّين بالضّبط هي المجال $]-1;+\infty[$

6. أ. **تبيين أنّ $F: x\mapsto (x-1)e^x-x$ دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$**

F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$\begin{aligned}F'(x)&=1\times e^x+e^x\times(x-1)\\&=e^x+xe^x-e^x-1\\&=xe^x-1\\&=f(x)\end{aligned}$$

ومنه F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$.

ب. **استنتاج أنّ $\mathcal{S}(\alpha)=(e^\alpha+\alpha-2)\ cm^2$**

f دالة مستمرة و $f(x)\leq 0$ على $[0;\alpha]$ ، ولدينا

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha[-f(x)]dx&=\int_0^\alpha(1-xe^x)dx\\&=[-F(x)]_0^\alpha\\&=[x-(x-1)e^x]_0^\alpha\\&=\alpha-(\alpha-1)e^\alpha-[0-(0-1)e^0]\\&=\alpha-1-(\alpha-1)e^\alpha\\&=\alpha-1-\alpha e^\alpha+e^\alpha\\&=e^\alpha+\alpha-1-\alpha e^\alpha\end{aligned}$$

وبما أنّ $f(\alpha)=0$ فإنّ $\alpha e^\alpha=1$ وعندئذ لدينا

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\alpha)&=(e^\alpha+\alpha-1-1)\,cm^2\\&=(e^\alpha+\alpha-2)\,cm^2\end{aligned}$$

■

سلّم تنقيط الموضوع الأوّل

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	0,5 + 0,5
2	0,5 + 0,5
3	0,5 + 0,5
4	0,5 + 0,5

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	0,25 + 0,25
I) 2.أ	0,75
I) 2.ب	0,25 + 0,5
II) 1.أ	0,25 + 0,5
II) 1.ب	0,25 + 0,25
II) 2.أ	0,5
II) 2.ب	0,25

التمرين الثالث (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1.أ	0,5
1.ب	1
2.أ	1
2.ب	1
3	0,5

التمرين الرابع (8 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	0,5 + 0,25 + 0,5
2.أ	1
2.ب	0,5 + 0,5
3.أ	0,5
3.ب	0,5
4.أ	0,75
4.ب	0,75
5.أ	0,5 + 0,25
5.ب	0,25
6.أ	0,75
6.ب	0,5

إجابة نموذجية مقترحة للموضوع الثاني

التمرين الأوّل (6 نق)

1. صحيح

التبرير. لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$

2. خاطئ

التبرير. لأنّ $g(5) > 0$.

3. صحيح

التبرير. لدينا

- $g(x) > 0$ على $[0;+\infty[$
- g مستمرة على $]-\infty;0]$
- g متزايدة تماما على $]-\infty;0]$
- $g(0) = 2$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

ومنه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلّا وحيداً.

ملاحظة. يُمكن التبرير عن طريق حلّ المعادلة $g(x) = 0$ مباشرة

4. صحيح

التبرير. g قابلة للاشتقاق ولدينا

$$\begin{aligned} g'(x) &= a \times e^{-x} + (-e^{-x}) \times (ax+2) \\ &= (a - ax - 2)\, e^{-x} \\ &= (-ax + a - 2)\, e^{-x} \end{aligned}$$

وبما أنّ

$$g'(0) = 0$$

فإنّ

$$(-a \times 0 + a - 2)\, e^{-0} = 0$$

أي

$$a - 2 = 0$$

ومنه

$$a = 2$$

■

التمرين الثاني (6 نق)

1. تبيين أنّ f زوجية.

- من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا $-x \in \mathbb{R}$
- من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{a(-x)^2 + b}{(-x)^2 + 2} \\ &= \frac{ax^2 + b}{x^2 + 2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ومنه الدّالة f زوجية.

2. أ. تعيين كلّا من $f(2)$ ، $f'(0)$ و $f'(2)$

لدينا $f(2)=0$ ، وأيضاً

$f'(2)$ معامل توجيه المماس (T_2) الذي يشمل النقطتين $A(2;0)$ و $B(-1;2)$ وعندئذ لدينا

$$\begin{aligned} f'(2) &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{2-0}{-1-2} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$f'(0)$ معامل توجيه المماس (T_1) الموازي لـ (xx') وبالتالي

$$f'(0)=0$$

ب. كتابة معادلة للمماس (T_2)

f قابلة للاشتقاق عند 2 ، ومنه (C_f) يقبل مماسا (T_2) معامل توجيهه $f'(2)$ ونكتب

$$(T_2): y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

وبما أنّ

$$f(2)=0 \qquad f'(2)=-\frac{2}{3}$$

فإنّ

$$(T_2): y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$

ج. تبيين أنّ $b=4$ و $a=-1$

لدينا $f(0)=2$

ومنه

$$\frac{a\times 0^2+b}{0^2+2}=2$$

وعليه

$$\begin{aligned} b &= 2\times 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

ولدينا $f(2)=0$

ومنه

$$\frac{a\times 2^2+4}{2^2+2}=0$$

وعليه

$$4a+4=0$$

وبالتالي

$$a=-1$$

3. شرح كيفية إنشاء المنحنى الممثّل للدّالة h انطلاقا من (C_f) .

من أجل كلّ x من $\mathbb{R}$ لدينا $h(x)=f(x-1)+2$ ، وعليه المنحنى الممثّل للدّالة h هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{i}+2\vec{j}$

■

التمرين الثالث (4 نق)

I) 1. حساب كُلّا من U_1 و U_2

$$U_1 = \frac{4}{5}U_0 + 1 = \frac{4}{5} \times 3 + 1 = \frac{17}{5}$$

$$U_2 = \frac{4}{5}U_1 + 1 = \frac{4}{5} \times \frac{17}{5} + 1 = \frac{93}{25}$$

2. أ. البرهان بالتّراجع أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n < 4$

- نرمز للخاصية " $U_n < 5$ " بالرمز $P(n)$.
- نتحقّق من صحّة $P(0)$

لدينا

$$U_0 = 3$$

ومنه

$$U_0 < 5$$

وعليه $P(0)$ صحيحة.

- من أجل عدد طبيعي كيفي k نفترض صحّة $P(k)$ ونبرهن صحّة $P(k+1)$.

لدينا

$$U_k < 5$$

ومنه

$$\frac{4}{5}U_k < 4$$

وعليه

$$\frac{4}{5}U_k + 1 < 4 + 1$$

أي

$$U_{k+1} < 5$$

وبالتالي $P(k+1)$ صحيحة.

- وحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع نستنتج أنّ $P(n)$ صحيحة من أجل كلّ عدد طبيعي n.

ب. تبيين أنّ المتتالية (U_n) متزايدة تماما، ثمّ استنتاج أنّها متقاربة.

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4}{5}U_n + 1 - U_n = \left(\frac{4}{5} - 1\right)U_n + 1 = -\frac{1}{5}U_n + 1$$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$U_n < 5$$

ومنه

$$-\frac{1}{5}U_n > -1$$

وعليه

$$-\frac{1}{5}U_n + 1 > -1 + 1$$

أي

$$U_{n+1} - U_n > 0$$

وبالتالي (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

استنتاج التقارب

لدينا

- (U_n) متزايدة على $\mathbb{N}$
- من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ ، $U_n < 5$ ، وعليه (U_n) محدودة من الأعلى بالعدد 5

وبالتالي (U_n) متقاربة.

II) 1. أ. تبيين أنّ المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\frac{4}{5}$ وتعيين حدّها الأوّل V_0

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - 5 \\ &= \frac{4}{5}U_n + 1 - 5 \\ &= \frac{4}{5}U_n - 4 \\ &= \frac{4}{5}(U_n - 5) \\ &= \frac{4}{5}V_n \end{aligned}$$

وبالتالي (V_n) هندسية أساسها $\frac{4}{5}$ وحدّها الأوّل V_0 حيث

$$\begin{aligned} V_0 &= U_0 - 5 \\ &= 3 - 5 \\ &= -2 \end{aligned}$$

ب. تعيين عبارة الحدّ العام V_n بدلالة n ، ثمّ استنتاج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $U_n = -2\left(\frac{4}{5}\right)^n + 5$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} V_n &= V_0 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-0} \\ &= -2\left(\frac{4}{5}\right)^n \end{aligned}$$

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$V_n = U_n - 5$$

وعليه

$$U_n = V_n + 5$$

وبالتالي

$$U_n = -2\left(\frac{4}{5}\right)^n + 5$$

ج. **حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$**

بما أنّ $-1 < \frac{4}{5} < 1$ ، فإنّ $\lim\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ ، ومنه $\lim U_n = 5$

2. أ. **حساب S_n بدلالة n.**

من أجل كلّ n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} S_n &= V_0 + V_1 + \cdots + V_n \\ &= V_0 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{4}{5}} \\ &= 10\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 1\right] \end{aligned}$$

ب. **استنتاج أنّه: من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $T_n = 5n + 8\left(\frac{4}{5}\right)^n - 5$**

من أجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا

$$\begin{aligned} T_n &= U_0 + U_1 + \cdots + U_n \\ &= V_0 + 5 + V_1 + 5 + \cdots + V_n + 5 \\ &= V_0 + V_1 + \cdots + V_n + 5 + 5 + \cdots + 5 \\ &= S_n + 5(n+1) \\ &= 10\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - 1\right] + 5(n+1) \\ &= 10 \times \frac{4}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n - 10 + 5n + 5 \\ &= 5n + 8\left(\frac{4}{5}\right)^n - 5 \end{aligned}$$

■

التمرين الرابع (7 نق)

I) 1. **تبيين أنّ الدّالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$**

g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$$

وبما أنّ $x > 0$ فإنّ $g(x) > 0$ ، ومنه g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

2. أ. تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,2<\alpha<1,3$

- g مستمرة على $]0;+\infty[$
- g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$
- لدينا

$$g(1,3)\approx 0,21 \qquad | \qquad g(1,2)\approx -0,2$$

ومنه $g(1,2)\times g(1,3)<0$

عندئذ نستنتج أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّا وحيدا α حيث $1,2<\alpha<1,3$.

ب. استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

- g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$
- $g(\alpha)=0$

عندئذ لدينا

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II 1. حساب كُلّا من $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left(x-\frac{2\ln x}{x}\right)=+\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\ln x=-\infty$$

وبالتالي المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (حامل محور التراتيب) مقارب لـ (C_f)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{2\ln x}{x}\right)=+\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

2. أ. تبيين أنّه: من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{\frac{2}{x}\times x-1\times 2\ln x}{x^2}\\ &= 1-\frac{2-2\ln x}{x^2}\\ &= \frac{x^2-2+2\ln x}{x^2}\\ &= \frac{g(x)}{x^2}\end{aligned}$$

ب. استنتاج أنّ f متناقصة تماما على $]0;\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ثمّ تشكيل جدول تغيّراتها.

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا $x^2>0$، ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $g(x)$ وعندئذ لدينا

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

• $f'(x) < 0$ على $]-\infty;\alpha[$ و $f'(\alpha) = 0$ ومنه f متناقصة تماما على $]-\infty;\alpha]$
• $f'(x) > 0$ على $]\alpha;+\infty[$ و $f'(\alpha) = 0$ ومنه f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$
وعندئذ نشكّل جدول تغيّرات f كما يلي

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

3. أ. تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f)

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

$$f(x) - x = x - \frac{2\ln x}{x} - x$$
$$= -\frac{2\ln x}{x}$$

وعليه

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{2\ln x}{x}\right)$$
$$= 0$$

وبالتالي المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب. دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

$$f(x) - x = -\frac{2\ln x}{x}$$

و وبما أنّ $x > 0$ فإنّ إشارة الفرق من إشارة $-2\ln x$ وعندئذ لدينا

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - x$	‖	$+$	0	$-$	

وينتج عن ذلك ما يلي

• (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $]0;1[$
• (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$
• (C_f) يقع تحت (Δ) على المجال $]1;+\infty[$

4. كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1

f قابلة للاشتقاق عند 1 ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه $f'(1)$ حيث
$(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

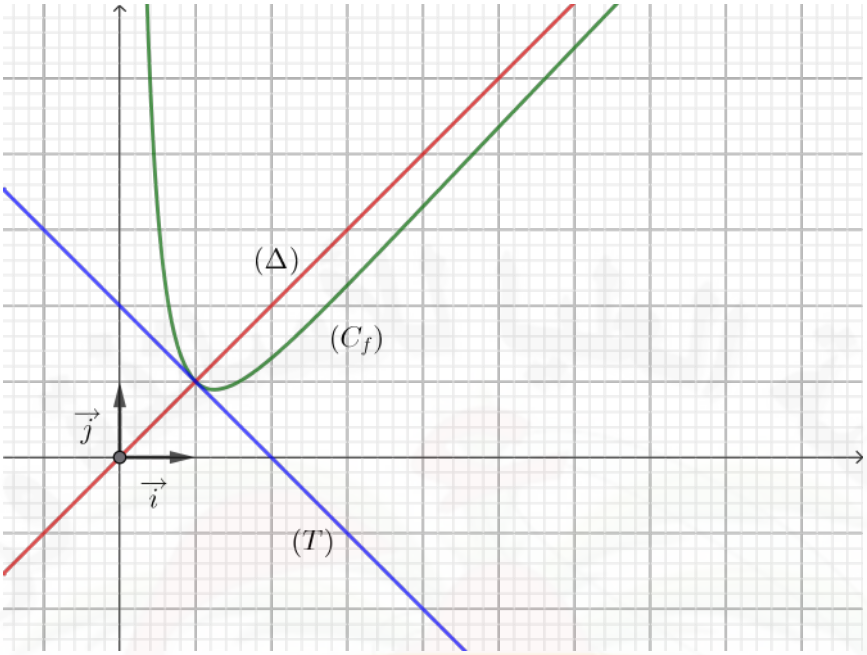
ولدينا

$$f(1) = 1 \qquad | \qquad f'(1) = -1$$

وبالتالي

$$(T) : y = -x + 2$$

5. إنشاء كُلّا من (Δ) ، (T) و (C_f)



6. أ. تبيين أنّه: من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ ، $H'(x) = x - f(x)$

H قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ ، ومن أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

$$H'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$$
$$= \frac{2\ln x}{x}$$

ومن أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ لدينا

$$x - f(x) = x - \left(x - \frac{2\ln x}{x}\right)$$
$$= \frac{2\ln x}{x}$$

وبالتالي من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$ ينتج أنّ

$$H'(x) = x - f(x)$$

ب. استنتاج بالسنتيمتر المربّع قيمة $\mathcal{S}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات $y = x$ ، $x = 1$ و $x = e$

f مستمرّة على $[1;e]$ و $x - f(x) \geq 0$ على $[1;e]$ ولدينا

$$\int_1^e [x - f(x)]dx = \int_1^e H'(x)dx$$
$$= [H(x)]_1^e$$
$$= H(e) - H(1)$$
$$= (\ln e)^2 - (\ln 1)^2$$
$$= 1$$

وبالتالي

$$\mathcal{S} = 1\,cm^2$$

■

سلّم تنقيط الموضوع الثاني

التمرين الأوّل (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	0,5 + 0,5
2	0,5 + 0,5
3	0,5 + 0,5
4	0,5 + 0,5

التمرين الثاني (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
1	1
2.أ	0,75
2.ب	1
2.ج	0,25 + 0,5
3	0,5

التمرين الثالث (4 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	0,25 + 0,25
I) 2.أ	0,5
I) 2.ب	0,25 + 0,5
II) 1.أ	0,25 + 0,5
II) 1.ب	0,25 + 0,25
II) 1.ج	0,25
II) 2.أ	0,5
II) 2.ب	0,25

التمرين الرابع (8 ن)

ترقيم السؤال	التنقيط
I) 1	0,5
I) 2.أ	0,5
I) 2.ب	0,5
II) 1	0,25 + 0,25 + 0,5
II) 2.أ	1
II) 2.ب	0,25 + 0,5
II) 3.أ	0,5
II) 3.ب	0,5
II) 4	0,75
II) 5	0,5 + 0,25 + 0,25
II) 6.أ	0,5
II) 6.ب	0,5

■ انتهى

يكتمل الملف بملاحظات القرّاء الكرام، لذلك في حالة وجود أي خلل في الحل يُرجى مُراسلتنا به بغية تصويبه لفائدة التلاميذ المقبلين على امتحان البكالوريا وذلك عن طريق البريد الإلكتروني prof.ardjani@gmail.com وجزاكم الله خيرا