



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

اختبار البكالوريا التجريبي - ماي-2025

مديرية التربية لولاية سطيف.

الشعبة: تسيير واقتصاد.

ثانويات: مقاطعة سطيف 02.

المدة: 03 ساعات ونصف

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأولالتمرين الأول: (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير:

(1) الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -e^x + \frac{1}{e^{x+1}}$ دالتها المشتقة f' معرفة بالعلاقة:

$$f'(x) = -e^x + \frac{1}{(e^{x+1})^2} \quad (\text{أ}) \quad f'(x) = -e^x - \frac{e^x}{(e^{x+1})^2} \quad (\text{ب}) \quad f'(x) = -e^x + \frac{e^x}{(e^{x+1})^2} \quad (\text{ج})$$

(2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = -\left(\frac{2025}{2024}\right)^n + 1$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ تساوي:

$$-\infty \quad (\text{أ}) \quad +\infty \quad (\text{ب}) \quad 1 \quad (\text{ج})$$

(3) مجموعة حلول المتراجحة: $2 - 2x \ln 3 \geq 0$ في $\mathbb{R}$ هي:

$$\left]-\infty; \frac{1}{\ln 3}\right] \quad (\text{أ}) \quad \left[\frac{1}{\ln 3}; +\infty\right[\quad (\text{ب}) \quad \left]-\infty; \frac{1}{\ln 3}\right] \quad (\text{ج})$$

(4) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{x^2+3x+4}{x}$ ، القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1; 3]$ هي:

$$5 + 2 \ln 3 \quad (\text{أ}) \quad 5 - 3 \ln 2 \quad (\text{ب}) \quad 5 - 2 \ln 3 \quad (\text{ج})$$

التمرين الثاني (05 نقاط) α عدد حقيقي، (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول: $u_0 = \alpha$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $3u_{n+1} = u_n - 2$ (I) عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.(II) نضع في كلِّ ممّا يأتي $\alpha = 3$.(1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -1$.(2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ، ثم استنتج أنّ (u_n) متقاربة.(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + 1$ (أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ يُطلب حساب حددها الأول v_0 .(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n .(ج) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1$ ، ثم احسب نهاية المتتالية (u_n) .(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{n-1} \quad \text{و} \quad S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

(1) احسب كلّاً من: S_n و P_n بدلالة n .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

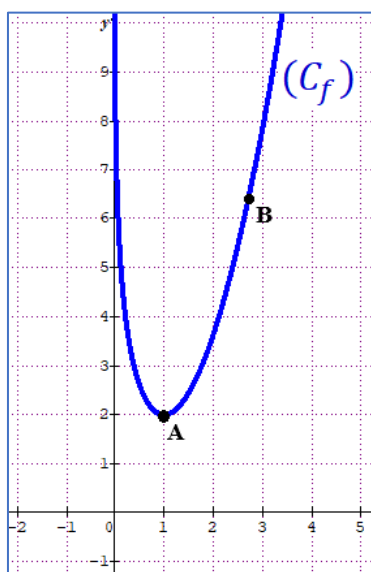
(1) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x^2 - 3x + 2)$

ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

(2) استنتج في المجال $]0; +\infty[$ مجموعة حلول المتراجحة: $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - (\ln x) + 2 \geq 0$

(3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $e^{2x} + 2e^{-x} = 2e^x + 1$

(4) حل في المجال $] -\infty; 4]$ المتراجحة: $\ln(-x^3 + 3x^2 + 4x + 4) < 2\ln(2)$



التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. a و b عدنان حقيقيان.

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = x^2 + a + b \ln(x)$$

$A(1; 2)$ و $B(e; e^2 - 1)$ نقطتان من (C_f) (لاحظ الشكل المقابل)

(1) بقراءة بيانية عين $f'(1)$ ، $f(1)$ و $f(e)$.

(2) بين أن $a = 1$ و $b = -2$.

(3) شكل كلاً من جدول تغيرات الدالة f ، و جدول إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

$$g(x) = x + \frac{1}{x} + 2 \frac{\ln(x)}{x}$$

(C_g) التمثيل البياني لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$

(1) بين أن: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ ثم احسب نهاية الدالة g عند $+\infty$.

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً x : $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين أن المنحنى (C_g) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) معادلته: $y = x$ عند $+\infty$ ثم ادرس وضعية (C_g) بالنسبة لـ (Δ)

(5) اكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة $e^{\frac{1}{2}}$.

(6) أنشئ كلا من (Δ) ، (T) و (C_g) .

III. نعتبر الدالة العددية H المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $H(x) = (\ln(x))^2$

(1) بين أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h على المجال $]0; +\infty[$ ، حيث: $h(x) = 2 \frac{\ln(x)}{x}$

(2) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 1$ و $x = e$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حدّها الأول $v_0 = 1$ و $v_0 + v_1 + v_2 = 7$.
- بين أنّ أساس المتتالية (v_n) هو 2 ، ثم اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .
- (2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_n = \ln(v_n)$
- بين أنّ المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$
- (أ) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{\ln 2}{2}(n^2 + n)$
- (ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون: $S_n = \ln \sqrt{2}^{650}$

التمرين الثاني (04 نقاط)

يمثل الجدول التالي عدد الحواسيب التي تمّ بيعها خلال 6 سنوات لشركة لصنع الأجهزة الإلكترونية (العدد بالآلاف):

السنة	2020	2021	2022	2023	2024	2025
الرتبة x_i	1	2	3	4	5	6
عدد الحواسيب بالآلاف y_i	20	30	43	63	92	135

- (1) (أ) مثلّ سحابة النقط $M_i(x_i, y_i)$ في معلم متعامد ($1cm$ لكل سنة و $1cm$ لكل 10 آلاف حاسوب)
- (ب) هل يمكن القيام بتسوية خطية؟ برر إجابتك.

- (2) نضع: $z_i = \ln y_i$ أكمل الجدول التالي (تعطى النتائج مدورة إلى 10^{-2}):

الرتبة x_i	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln y_i$						

- (أ) أنشئ سحابة النقط $M_i(x_i; z_i)$
- (ب) احسب $(\bar{X}, \bar{Z})$ إحداثيات النقطة G ، النقطة المتوسطة لسحابة النقط $M_i(x_i; z_i)$ ثم علّمها.
- (ج) بين أنّ معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا للسلسلة $(x_i; z_i)$ تُعطى بـ: $z = 0.37x + b$ ، حيث b عدد حقيقي يُطلب تعيينه.

- (3) أثبت أنّ عدد الحواسيب المُباعة يمثل بعلاقة من الشكل $y = ke^{0.37x}$ حيث k عدد حقيقي موجب تماما يُطلب تعيينه (مدورا إلى الوحدة).

- (4) بفرض أنّ عدد الحواسيب المُباعة يتزايد بنفس الوتيرة، ماهي السنة التي يبلغ فيها عدد المبيعات حوالي مليون حاسوب؟

التمرين الثالث (05 نقاط)

f دالة معرفة على: $] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty[$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
يُعطى جدول تغيراتها المُقابل:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-
$f(x)$	e	$+\infty$	$\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$-\infty$

- تمعّن في جدول تغيرات الدالة f ثم أجب مع التبرير عما يأتي:

(1) حدّد المستقيمت المقاربة للمنحنى (C_f) ، ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1446}{f(x)} \right)$.

(2) شكل جدول إشارة الدالة f .

(3) قارن بين العددين $f(2)$ و $f(-2)$.

(4) اكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 3.

(5) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + \frac{4}{e^{x+2}}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$

(1) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = 2x + 2 - \frac{2e^x}{e^{x+2}}$

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) بيّن أنّ المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = 2x + 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

(3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .

(4) أ) أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = \frac{2e^{2x} + 4e^{x+8}}{(e^{x+2})^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(5) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-0.9 < \alpha < -0.8$

(6) أنشئ كلا من (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

(7) نعتبر الدالة العددية H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x) = 2x - 2 \ln(e^x + 2)$

أ) بيّن أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة: $h: x \mapsto \frac{4}{e^{x+2}}$

ب) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها: $y = 2x$ ، $x = \ln(2)$ و $x = \ln(5)$.

التنقيط

التصحيح النموذجي لباكالوريا التجريبي شعبة تسيير واقتصاد

الموضوع الأولحل التمرين الأول :

تعيين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاث المعطاة في كل حالة مع التبرير:

1/ الاقتراح الصحيح هو: الاقتراح (ب)

التبرير: لدينا $f'(x) = (-e^x)' + \left(\frac{1}{e^x+1}\right)' = -e^x - \frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = -e^x - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

2/ الاقتراح الصحيح هو: الاقتراح (أ)

التبرير: لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\left(\frac{2025}{2024}\right)^n + 1 \right] = -\infty$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\left(\frac{2025}{2024}\right)^n + 1 \right] = -\infty$ وبالتالي $\frac{2025}{2024} > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2025}{2024}\right)^n = +\infty$$

3/ الاقتراح الصحيح هو: الاقتراح (ج)

التبرير: لدينا $-2x \ln 3 \geq -2$ معناه $2 - 2x \ln 3 \geq 0$ معناه $x \leq \frac{2}{2 \ln 3}$ معناه $x \leq \frac{1}{\ln 3}$ وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة السابقة هي $\left] -\infty; \frac{1}{\ln 3} \right]$

4/ الاقتراح الصحيح هو: الاقتراح (أ)

التبرير: لتكن m القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1; 3]$

$$m = \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \left(\frac{x^2 + 3x + 4}{x} \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \left(x + 3 + \frac{4}{x} \right) dx$$

$$\therefore m = \left[\frac{1}{2} x^2 + 3x + 4 \ln x \right]_1^3 = 5 + 2 \ln 3$$
 ومنه

حل التمرين الثاني:

I. تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة: (u_n) ثابتة معناه $\alpha - \frac{2}{3} \alpha = \frac{1}{3} \alpha$ أي

$$\frac{2}{3} \alpha = -1 \quad \text{ومنه} \quad \alpha = -1$$

II. نضع $u_0 = 3$

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > -1$:

نسمي $p(n)$ الخاصية: "من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > -1$ "

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 3 > -1$ ومنه $p(0)$ صحيحة.

نفرض أن الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $u_n > -1$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ لدينا $u_n > -1$ أي $\frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} > -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$ ومنه $u_{n+1} > -1$ وبالتالي حسب مبدأ البرهان بالتراجع فإن $p(n)$ صحيحة أي $u_n > -1$ من أجل كل عدد طبيعي n .

(2) تبيان أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} - u_n = -\frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}(u_n + 1)$$

وبما أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -1$ أي $u_n + 1 > 0$ ومنه $-\frac{2}{3}(u_n + 1) < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$.

الاستنتاج: بما أن (u_n) متناقصة تماماً ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

(3) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $v_n = u_n + 1$

(أ) اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحساب حدّها الأول:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(u_n + 1) = \frac{1}{3}v_n$$

وحدّها الأول $v_0 = u_0 + 1 = 3 + 1 = 4$ هو

(ب) كتابة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(ج) كتابة u_n بدلالة n : لدينا $v_n = u_n + 1$ أي $u_n = v_n - 1$ ومنه $u_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1 \quad \text{إذن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_{n-1} \quad \text{و} \quad S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$$

حساب S_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 - 1 + v_1 - 1 + \dots + v_{n-1} - 1 \\ &= v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} - 1(n) \\ &= 4 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \right) - (n) \\ &= 6 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) - (n) \end{aligned}$$

حساب P_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} P_n &= v_0 \times v_0 \times q \times \dots \times v_0 \times q^{n-1} \quad \text{ومنّه} \\ &= v_0^n \times q^{1+2+\dots+n-1} \\ &= 4^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \end{aligned}$$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{n-1} \quad \text{لدينا}$$

حل التمرين الثالث:

1/ أ- التحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x+1)(x^2 - 3x + 2)$

$$(x+1)(x^2 - 3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x + x^2 - 3x + 2 = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

لدينا $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ معناه $(x+1)(x^2 - 3x + 2) = 0$ معناه $(x+1) = 0$ أو $(x^2 - 3x + 2) = 0$ وبالتالي نجد مجموعة حلول المعادلة السابقة هي $S = \{-1; 1; 2\}$.

2 / استنتاج في المجال $]0; +\infty[$ مجموعة حلول المتراجحة $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - (\ln x) + 2 \geq 0$:

نضع المعادلة (*) $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - (\ln x) + 2 = 0$

بوضع $X = \ln(x)$ في المعادلة (*) تصبح كالتالي $X^3 - 2X^2 - X + 2 = 0$ وهي معادلة مكافئة للمعادلة الأولى وبالتالي حلولها هي $\{-1; 1; 2\}$ ومنه حلول المعادلة (*) هي $\{e^{-1}; e^1; e^2\}$ ونلخص إشارة العبارة في الجدول التالي:

x	0	e^{-1}	e^1	e^2	$+\infty$
$(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - (\ln x) + 2$		- 0	+ 0	- 0	+

ومنه مجموعة حلول المتراجحة $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - (\ln x) + 2 \geq 0$ في المجال $]0; +\infty[$ هي

$$[e^{-1}; e] \cup [e^2; +\infty[$$

3 / حل المعادلة $e^{2x} + 2e^{-x} = 2e^x + 1$ في $\mathbb{R}$:

لدينا $e^{2x} + 2e^{-x} = 2e^x + 1$ بضرب طرفي المعادلة في e^x تصبح كالتالي $e^{3x} + 2e^0 = 2e^{2x} + e^x$ ومنه $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0$ وبوضع $Y = e^x$ نجد $Y^3 - 2Y^2 - Y + 2 = 0$ والتي هي معادلة مكافئة لمعادلة السؤال الأول التي حلولها $\{-1; 1; 2\}$ ومنه قيم Y هي $\{1; 2\}$ (-1 مرفوض لأن $Y = e^x > 0$) ومنه قيم x هي $\{\ln(1) = 0; \ln(2)\}$ ومنه حلول المعادلة $e^{2x} + 2e^{-x} = 2e^x + 1$ في $\mathbb{R}$ هي $\{0; \ln(2)\}$.

4 / حل في المجال $]-\infty; 4]$ المتراجحة $\ln(-x^3 + 3x^2 + 4x + 4) > 2\ln(2)$:

لدينا $\ln(-x^3 + 3x^2 + 4x + 4) > 2\ln(2)$ معناه $\ln(-x^3 + 3x^2 + 4x + 4) > \ln(4)$ ومنه

$-x^3 + 3x^2 + 4x + 4 > 4$ ومنه $-x^3 + 3x^2 + 4x > 0$ أي $x(-x^2 + 3x + 4) > 0$ ندرس إشارة العبارة

$x(-x^2 + 3x + 4)$ ثم نستخلص الحلول في المجال $]-\infty; 4]$

x	$-\infty$	-1	0	4
$x(-x^2 + 3x + 4)$		+ 0	- 0	+ 0

ومنه مجموعة حلول المتراجحة $\ln(-x^3 + 3x^2 + 4x + 4) > 2\ln(2)$ هي $]0; 4[\cup]-\infty; -1[$

حل التمرين الرابع

1. لدينا $f(x) = x^2 + a + b\ln(x)$

1. بقراءة بيانية: لدينا (C_f) يشمل النقطتين $A(1; 2)$ و $B(e; e^2 - 1)$ والنقطة A نقطة حدية لـ (C_f)

إذن نجد $f(1) = 2$ ، $f'(1) = 0$ و $f(e) = e^2 - 1$.

2. تبين أن $a = 1$ و $b = -2$:

لدينا $f(1) = 2$ معناه $f(1) = 1 + a + b\ln(1) = 1 + a = 2$ ومنه $a = 1$.

لدينا $f(e) = e^2 - 1$ معناه $f(e) = e^2 + 1 + b\ln(e) = e^2 + 1 + b = e^2 - 1$ ومنه $b = -2$.

3. تشكيل كلا من جدول تغيرات الدالة f وجدول إشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

جدول التغيرات

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$

جدول الإشارة

x	0	$+\infty$
$f(x)$		+

II.

1. تبين أن $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ وحساب نهاية الدالة g عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{x} + 2 \frac{\ln(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{x} (1 + 2 \ln(x)) \right) = -\infty$$

التفسير البياني (C_g) : يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = 0$ (حامل محور الترتيب).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} + 2 \frac{\ln(x)}{x} \right) = +\infty$$

2. التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + 2 \frac{\frac{1}{x} - \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + 2(1 - \ln(x))}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - 2 \ln(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$$

3. استنتاج اتجاه تغير الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها :

بما أن $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2} > 0$ على $]0; +\infty[$ فإن الدالة g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	0	$+\infty$
$g(x)$		$+\infty$

4. تبين أن المنحنى (C_g) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته: $y = x$ بجوار $+\infty$ ثم دراسة وضعية (C_g)

بالنسبة إلى (Δ) :

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 2 \frac{\ln(x)}{x} \right) = 0$ ومنه (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_g) بجوار $+\infty$

دراسة الوضع النسبي (C_g) و (Δ) :

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما $g(x) - x = \frac{1}{x} + 2 \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1 + 2 \ln(x)}{x}$

إشارة $g(x) - x$ من إشارة $1 + 2 \ln(x)$ وعليه نضع $1 + 2 \ln(x) = 0$ فنجد $x = e^{-\frac{1}{2}}$ وعليه

لما $x \in]0; e^{-\frac{1}{2}}[$ نجد $g(x) - x < 0$ ومنه (C_g) يقع تحت (Δ) ، ولما $x = e^{-\frac{1}{2}}$ نجد $g(x) - x = 0$ ومنه (C_g) يقطع (Δ)

ولما $x \in]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$ نجد $g(x) - x < 0$ ومنه (C_g) يقع فوق (Δ) .

5. كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_g) عند النقطة ذات الفاصلة $e^{\frac{1}{2}}$.

$$g'\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{e} = \frac{e + 1 - 2 \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{e} = \frac{e}{e} = 1 \text{ و } (T): y = g'\left(e^{\frac{1}{2}}\right) \left(x - e^{\frac{1}{2}}\right) + g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$g'\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{e} = \frac{e + 1 - 2 \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{e} = \frac{e}{e} = 1 \text{ و } g\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} + 2 \frac{\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}$$

إذن نجد $(T): y = 1 \left(x - e^{\frac{1}{2}}\right) + e^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}} = x + \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}$ ومنه

$$(T): y = x + 2e^{-\frac{1}{2}}$$

6. إنشاء كلا من (Δ) ، (T) و (C_g) :

||- نعتبر الدالة العددية H المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$H(x) = (\ln(x))^2$$

1. تبين أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h حيث:

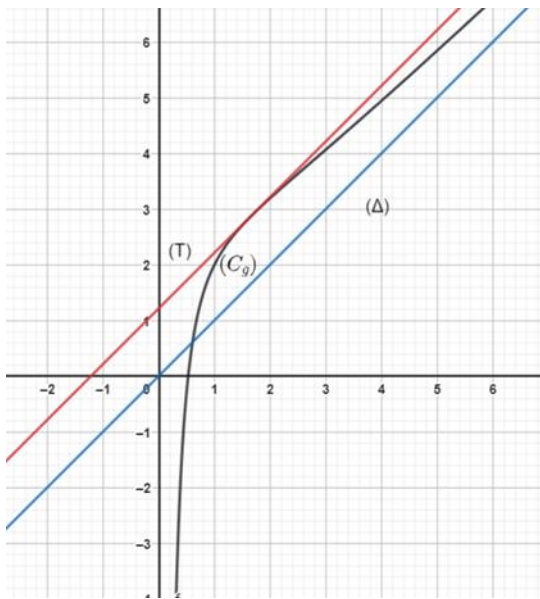
$$h(x) = 2 \frac{\ln(x)}{x} \text{ على المجال }]0; +\infty[$$

$$H'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \ln(x) = 2 \frac{\ln(x)}{x} = h(x)$$

2. حساب بـ cm^2 المساحة S للحيز المستوي المحدد

بالمنحنى (C_g) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما على الترتيب $x = e$ و $x = 1$:

$$\int_1^e (g(x) - x) dx = \int_1^e \frac{1}{x} + 2 \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\ln(x) + (\ln(x))^2 \right]_1^e = 2 cm^2$$



الموضوع الثاني

حل التمرين الأول :

(1) (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حدّها الأول $v_0 = 1$ (موجب) إذن أساسها يكون موجب.
تبيان أنّ أساس المتتالية هو 2 وكتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :-

نضع q أساس المتتالية (v_n) بما أنّ (v_n) هندسية فإنّ $v_1 = v_0 q = q$ و $v_2 = v_0 q^2 = q^2$ إذن

$$v_0 + v_1 + v_2 = 1 + q + q^2$$

ومنه $q^2 + q + 1 = 7$:ومنه $q^2 + q - 6 = 0$ هي معادلة من الدرجة الثانية حلولها هي $q_1 = 2$ و $q_2 = -3$
 مرفوض لأن أساس المتتالية موجب ومنه أساس المتتالية (v_n) هو 2 .

كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :-

لدينا $v_n = v_0 q^n$ ومنه $v_n = 1 \times 2^n = 2^n$

(2) لدينا المتتالية العددية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_n = \ln(v_n)$:-

$$u_n = \ln(v_n) \text{ معناه } u_n = \ln(2^n) = n \ln(2)$$

تبيان أنّ المتتالية (u_n) حسابية وتعيين أساسها :-

$u_n = n \ln(2)$ معناه $u_{n+1} = (n+1) \ln(2)$ إذن $u_{n+1} - u_n = (n+1) \ln(2) - n \ln(2)$ ومنه $u_{n+1} - u_n = \ln(2)$ حسابية وأساسها
 $u_{n+1} - u_n = (n+1 - n) \ln(2) = \ln(2)$

هو $\ln(2)$.

حساب $u_0 = \ln(v_0) = \ln(1) = 0$:-

(3) بوضع من أجل كل عدد طبيعي n $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$:-

(أ) تبيان أنّ $S_n = \frac{\ln 2}{2} (n^2 + n)$:-

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ إذن $S_n = 0 + 1 \ln(2) + 2 \ln(2) + \dots + n \ln(2)$ ومنه $S_n = (0 + 1 + 2 + \dots + n) \ln(2)$

$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (مجموع متتالية حسابية أساسها 1 حدّها الأول 0) ومنه $S_n = \frac{n(n+1)}{2} \ln 2$

(ب) تعيين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون $S_n = \ln \sqrt{2}^{650}$:-

لدينا $S_n = \ln \sqrt{2}^{650}$ معناه $\frac{\ln 2}{2} (n^2 + n) = \ln 2^{\frac{650}{2}}$ معناه

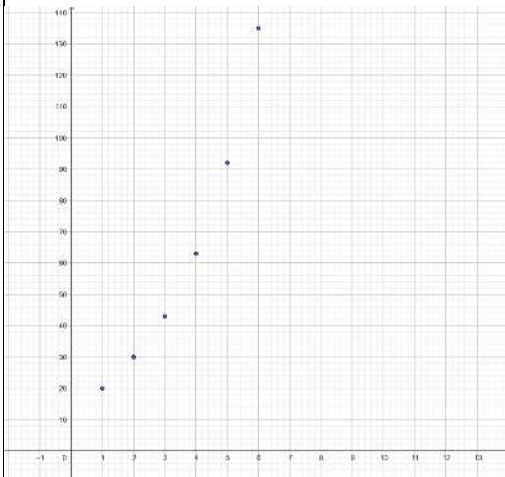
$$\frac{(n^2 + n)}{2} \ln 2 = \frac{650}{2} \ln 2 \text{ معناه } n^2 + n = 650$$

معناه $n^2 + n - 650 = 0$ معادلة من الدرجة الثانية حلولها هي
 $n_1 = 25$ و $n_2 = -26$ (مرفوض لأن n عدد طبيعي)، ومنه قيمة
 n هي 25 .

حل التمرين الثاني:

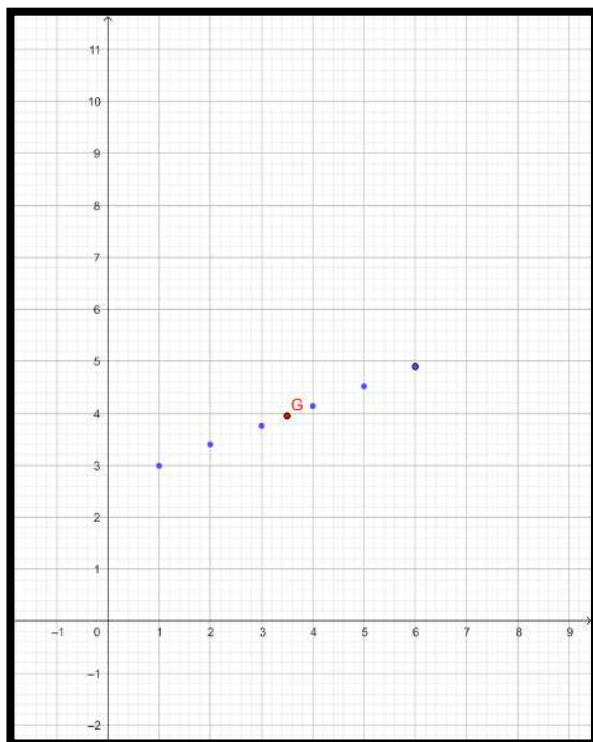
1. أ- تمثيل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$

ب- نعم، يمكن القيام بتسوية خطية لأن السحابة بشكل متطاوّل



2. اكمال الجدول :

x_i	1	2	3	4	5	6	المجموع
z_i	2,99	3,40	3,76	4,14	4,52	4,90	
$x_i \times z_i$	2,99	6,8	11,28	16,52	22,6	29,4	89,59
$(x_i - \bar{x})^2$	6,25	2,25	0,25	0,25	2,25	6,25	17,5



أ- تمثيل سحابة النقط $M_i(x_i; z_i)$

ب- $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$;

$\bar{z} = \frac{2,99+3,40+3,76+4,14+4,52+4,90}{6} = 3,95$

النقطة المتوسطة لسحابة النقط $M_i(x_i; z_i)$ هي

$G(\bar{x}; \bar{z})$ أي $G(3,5; 3,95)$

وتعليمها.

ج- ايجاد معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات

الدنيا $(x_i; z_i)$:

لدينا: $a = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i z_i - \bar{x} \bar{z}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

ومنه: $a = \frac{\frac{1}{6} \times 89,59 - 3,5 \times 3,95}{\frac{1}{6} \times 17,5} = 0,37$

اذن: $z = 0,37x + b$ ولدينا: $b = \bar{z} - a\bar{x}$

ومنه: $b = 3,95 - 0,37 \times 3,5 = 2,655$

اذن: $z = 0,37x + 2,655$

3. لدينا: $z = \ln y$ ومنه: $\ln y = 0,37x + b$

اذن: $y = e^{0,37x + 2,655}$

اذن: $y = e^{2,655} e^{0,37x}$ اي

$y = 14e^{0,37x}$

4. عدد المبيعات حوالي مليون حاسوب أي: $y = 1000000$ معناه: $10^6 = 14e^{0,37x}$

ومنه: $0,37x = \ln\left(\frac{10^6}{14}\right)$ اذن: $x = \frac{1}{0,37} \ln\left(\frac{10^6}{14}\right)$ وبالتالي: $x = 30$

أي رتبة السنة الموافقة هي 30

ومنه: السنة التي يبلغ فيها عدد الحواسيب حوالي مليون حاسوب هي: $2020 + 30 - 1 = 2049$

حل التمرين الثالث:

1. تحديد المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f)

$y = e$: معادلة مستقيم مقارب أفقي لـ (C_f) لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e$

$x = 1$: معادلة مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) لأن $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

استنتاج $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1446}{f(x)} \right) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1446}{f(x)} \right) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = 0$

2.أ) تشكيل جدول إشارة $f(x)$:

0.5		x	$-\infty$	1	$+\infty$
		$f(x)$	+		-

ب) المقارنة بين العددين $f(2)$ و $f(-2)$:

لدينا $f(-2) > 0$ لأن الدالة موجبة تماما على المجال $]-\infty; 1[$ و $]-2 \in]-\infty; 1[$

ولدينا $f(2) < 0$ لأن الدالة سالبة تماما على المجال $]1; +\infty[$ و $2 \in]1; +\infty[$ ومنه $f(-2) > f(2)$.

3. معادلة المماس (Δ) : $y = f'(3)(x-3) + f(3)$ ومنه $y = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ ومنه $y = 0(x-3) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

4. المناقشة البيانية $f(x) = m$: مناقشة أفقية.

من خلال الجدول

لما $m \in \left] -\infty; \ln\left(\frac{1}{2}\right) \right[$ يوجد حلان، لما $m = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ يوجد حل واحد، لما $m \in \left] \ln\left(\frac{1}{2}\right); e \right[$ لا يوجد حلول

لما $m = e$ يوجد حل واحد.

حل التمرين الرابع:

1. أ- تبين أن : $f(x) = 2x + 2 - \frac{2e^x}{e^x+2} = 2x + \frac{2(e^x+2)-2e^x}{e^x+2} = f(x)$

حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2. تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2e^x}{e^x+2} = 0 \quad : (\Delta): y = 2x + 2$$

الوضع النسبي : بما أن: $\frac{-2e^x}{e^x+2} < 0$ فإن: (C_f) يقع تحت (Δ') يساعد في الإنشاء.

3. أ) تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ ثم دراسة الوضع النسبي لـ

(C_f) و (Δ) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x+2} = 0 \quad : (\Delta): y = 2x$$

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) : بما أن: $\frac{4}{e^x+2} > 0$ فإن: (C_f) يقع فوق (Δ)

4. أ- أثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{2e^{2x} + 4e^x + 8}{(e^x + 2)^2}$

$$f'(x) = 2 - \frac{4e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{2(e^x + 2)^2 - 4e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{2(e^{2x} + 2e^x + 4)}{(e^x + 2)^2} \text{ لدينا}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها : بما أن $f'(x) > 0$ فان: الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

5. تبين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة

وحيدة فاصلتها α حيث: $-0.9 < \alpha < -0.8$

بما أن f مستمرة ورتيبة (متزايدة تماما) على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة ورتيبة (متزايدة تماما) على المجال $]-0.9; -0.8[$ و أيضا $f(-0.8) \approx 0.33, f(-0.9) \approx -0.1$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-0.9 < \alpha < -0.8$

6. إنشاء (Δ) , (Δ') , (C_f)

7. (أ) تبين أن الدالة H هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{4}{e^x + 2}$

$$H'(x) = 2 - \frac{2e^x}{e^x + 2} = \frac{4}{e^x + 2}$$

(ب) حساب مساحة الحيز ب cm^2 :

$$\int_{\ln 2}^{\ln 5} [f(x) - 2x] dx = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{4}{e^x + 2} dx = [H(\ln 5) - H(\ln 2)] = [2 \ln 5 - 2 \ln 7 - 2 \ln 2 + 2 \ln 4] \times 2 \times 2 = 8 \ln \frac{10}{7}$$