

إختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (5 نقاط)

- عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:
1. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x) = x^2 + 2$ وليكن (C_f) منحنىها البياني.
 - العدد المشتق للدالة f عند 1 يساوي:

(ج) $-\frac{1}{2}$

(ب) 2

(أ) 1

- معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة 1 هي:

(ج) $y = x + 1$

(ب) $y = 2x + 1$

(أ) $y = 2x - 1$

2. لتكن (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = n^2 + n$.

- المتتالية (U_n) :

(ج) لاهسابية ولاهندسية.

(ب) هندسية

(أ) حسابية

- المتتالية (U_n) :

(ج) ليست رتيبة.

(ب) متناقصة تماما.

(أ) متزايدة تماما.

التمرين الثاني: (7 نقاط)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{5}{3}U_n - \frac{1}{3} \end{cases}$$

1. أحسب U_1, U_2 و U_3 .

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: U_n > \frac{1}{2}$

3. استنتج أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

4. نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = U_n - \frac{1}{2}$

- (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $V_{n+1} = \frac{5}{3}V_n$ ثم استنتج أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

- (ب) أكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n

(ج) نضع $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ ، بين أن $S_n = -\frac{33}{4} \left[1 - \left(\frac{5}{3} \right)^{n+1} \right]$

- (د) استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

5. أكتب بدلالة n الجداء T_n حيث: $T_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$

التمرين الثالث: (8 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(I) 1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا.

3. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$$

4. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

5. أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(II) 1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$.

2. عين إشارة $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3. أكتب معادلة المستقيم (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

4. بين أن النقطة $A(-1; -2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

5. أنشئ كل من (Δ) ، (T) و (C_f) .

1 حساب الحدود:

$$u_1 = \frac{5}{3}u_0 - \frac{1}{3} \quad \text{لدينا}$$

$$u_1 = \frac{5}{3} \times 6 - \frac{1}{3} \quad \text{ومنه}$$

$$u_1 = \frac{30 - 1}{3} = \frac{29}{3}$$

$$u_2 = \frac{5}{3}u_1 - \frac{1}{3} \quad \text{لدينا}$$

$$u_2 = \frac{5}{3} \times \frac{29}{3} - \frac{1}{3} \quad \text{ومنه}$$

$$u_2 = \frac{145 - 1}{9} = \frac{144}{9}$$

$$u_3 = \frac{5}{3}u_2 - \frac{1}{3} \quad \text{لدينا}$$

$$u_3 = \frac{5}{3} \times \frac{144}{9} - \frac{1}{3} \quad \text{ومنه}$$

$$u_3 = \frac{710 - 1}{27} = \frac{709}{27}$$

2 البرهان بالتراجع

نسمي $P(n)$ الخاصية $(u_n \geq \frac{1}{2})$

المرحلة الأولى:

التحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 0$ أي $P(0)$

لدينا $u_0 = 6$ ومنه $u_0 \geq \frac{1}{2}$ وعليه $P(0)$ صحيحة.

المرحلة الثانية:

نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي $u_n \geq \frac{1}{2}$

و نثبت أن $P(n+1)$ صحيحة، أي $u_{n+1} \geq \frac{1}{2}$

$$u_n \geq \frac{1}{2} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{5}{3}u_n \geq \frac{5}{6} \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{5}{3}u_n - \frac{1}{3} \geq \frac{5}{6} - \frac{1}{3} \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{5}{3}u_n - \frac{1}{3} \geq \frac{1}{2} \quad \text{أي}$$

إذن $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة:

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq \frac{1}{2}$

استنتاج أن (u_n) متزايدة تماماً:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{3}u_n - \frac{1}{3} - u_n \quad \text{لدينا}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3} \quad \text{ومنه}$$

$$u_n \geq \frac{1}{2} \quad \text{ولدينا}$$

$$\frac{2}{3}u_n \geq \frac{1}{3} \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{2}{3}u_n - \frac{1}{3} \geq 0$$

التمرين (1)

إختيار الإجابة الصحيحة مع التعليل:

1 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x) = x^2 + 2$ و ليكن (C_f) منحناها البياني.

• العدد المشتق للدالة f عند 1 يساوي: (ب) 2

التبرير:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h + 3 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2$$

• معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة 1 هي:

(ب) $y = 2x + 1$

التبرير:

$$(T) \quad y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$= 2(x-1) + 3$$

$$= 2x - 2 + 3$$

$$= 2x + 1$$

2 لتكن (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = n^2 + n$

• المتتالية (U_n) (ج) لاحتسابية ولاهندسية.

التبرير: $u_0 = 0 \quad u_1 = 2 \quad u_2 = 6$

* لدينا: $u_0 + u_2 \neq 2u_1$ ومنه المتتالية (U_n) ليست حسابية.

* لدينا: $u_0 \times u_2 \neq (u_1)^2$ ومنه المتتالية (U_n) ليست هندسية.

إذن المتتالية (U_n) ليست حسابية ولاهندسية.

• المتتالية (U_n) (أ) متزايدة تماماً.

التبرير:

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + n + 1 - (n^2 + n)$$

$$= n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n$$

$$= 2n + 2 > 0$$

التمرين (2)

$$\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{5}{3}U_n - \frac{1}{3} \end{cases}$$

4 كتابة الجداء T_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n &= v_0 \times (v_0 q) \times (v_0 q^2) \times \dots \times v_0 q^n \\ &= (v_0 \times \dots \times v_0)(q \times q^2 \times \dots \times q^n) \\ &= v_0^{n+1} q^{1+2+\dots+n} \\ &= v_0^{n+1} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= \left(\frac{11}{2}\right)^{n+1} \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

التمرين (3)

(I)

1 حساب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

2 حساب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ (أ)

- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$

ب) التفسير الهندسي:

المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

3 تعيين الأعداد الحقيقية a, b و c :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b + \frac{c}{x+1} \\ &= \frac{(ax+b)(x+1) + c}{x+1} \\ &= \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1} \\ &= \frac{ax^2 + (a+b)x + b+c}{x+1} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 4 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 3 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد:}$$

4 تبيان أن المستقيم (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) : لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{x+1} - (x-1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

و عليه المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.

4 / ا تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \frac{5}{3}v_n$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{3}u_n - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{3}u_n - \frac{5}{6} \\ &= \frac{5}{3} \left(u_n - \frac{5}{6} \right) \\ &= \frac{5}{3} \left(u_n - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{5}{3}v_n \end{aligned}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{5}{3}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{11}{2}$

4 ب / كتابة v_n بدلالة n :

$$v_n = \frac{11}{2} \left(\frac{5}{3} \right)^n \quad \text{ومنه} \quad v_n = v_0 q^n$$

استنتاج u_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + \frac{1}{2} \quad \text{لدينا} \\ &= \frac{11}{2} \left(\frac{5}{3} \right)^n + \frac{1}{2} \quad \text{ومنه} \end{aligned}$$

4 ج / حساب S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{11}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{5}{3}} \\ &= \frac{11}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{3} \right)^{n+1}}{-\frac{2}{3}} \\ &= -\frac{11}{2} \times \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{5}{3} \right)^{n+1} \right] \\ &= -\frac{33}{4} \left[1 - \left(\frac{5}{3} \right)^{n+1} \right] \end{aligned}$$

4 د / استنتاج S'_n :

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= \left(v_0 + \frac{1}{2} \right) + \left(v_1 + \frac{1}{2} \right) + \dots + \left(v_n + \frac{1}{2} \right) \\ &= (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{33}{4} \left[1 - \left(\frac{5}{3} \right)^{n+1} \right] + \frac{1}{2} \times (n+1) \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{x+1} - (x-1) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

4 دراسة الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$ ، $f(x) - y = \frac{4}{x+1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-		+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

(II)

1 نبيان أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ ، $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2x(x+1) - (1)(x^2+3)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2x - x^2 - 3}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}\end{aligned}$$

2 (أ) دراسة إشارة $f'(x)$:

بما أن المقام موجب فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$

(ب) استنتاج اتجاه التغير:

الدالة f متزايدة تماماً على المجالين $]-\infty; -3]$ و $[1; +\infty[$ ، و متناقصة تماماً على المجالين $]-3; -1[$ و $] -1; 1]$

(ج) جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-6	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

3 معادلة المماس (T) :

$$\begin{aligned}(T): y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= -3x + 3\end{aligned}$$

4 إثبات أن النقطة $A(-1; -2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ فإن $-2-x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\begin{aligned}f(-2-x) + f(x) &= -2-x-1 + \frac{4}{-2-x+1} + x-1 + \frac{4}{x+1} \\ &= -4 + \frac{-4}{x+1} + \frac{4}{x+1} \\ &= \frac{4}{x+1} = -4 = 2 \times (-2)\end{aligned}$$

ومنه النقطة $A(-1; -2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

5 الإنشاء:

