



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول (20 نقطة)

التمرين الأول: (04 ن)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = 3u_n - 4$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 2$
2. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة.
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 2$
أ - بين أن المتتالية (v_n) هندسية، حدد أساسها وحدها الأول.
ب - أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n
ج - أحسب المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
4. نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n = \ln(u_n - 2)$
أ - بين أن (w_n) متتالية حسابية ثم عبر عن w_n بدلالة n .
ب - أحسب المجموع: $S'_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

التمرين الثاني: (04 ن)

يمثل الجدول التالي التطور في رأس مال المقاولات بالملايير بين سنوات 2003 و 2010 حسب تصريحات مديرية الضرائب:

السنوات	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
رتبة السنة x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
رأس المال بالمليار Y_i	10,7	13,3	14,9	15,4	17,4	17,1	15,8	17,8

المصدر: المديرية العامة للضرائب (أوت 2011)

1. مثل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O(0; 10)$ ، $1cm$ لكل 1 سنة على محور الفواصل و $1cm$ لكل 1 مليار على محور الترتيب
2. احسب إحداثيا النقطة المتوسطة $G(\bar{x}; \bar{y})$ ثم علمها.
3. أ - بين أن معادلة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي: $y = 0.84x + 12.36$
ب - بفرض ان هذا التعديل الخطي يبقى صالح حتى سنة 2023 اوجد قيمة رأس مال هذه المقاولات في هذه السنة 2023
4. اوجد السنة التي سيتضاعف رأس مال هذه المقاولات الابتدائي (يصبح 21,4 مليار).

التمرين الثالث: (04ن)

- نعتبر كثير الحدود $P(x)$ للمتغير الحقيقي x حيث: $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$
1. تحقق أن $x=2$ حل للمعادلة $P(x)=0$.
 2. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $P(x) = (x-2)(2x^2 + 5x - 3)$.
 3. أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$.
ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين ذات المجهول x التاليتين:
 $6e^{-3x} + e^{-x} - 13e^{-2x} + 2 = 0$ ، $2(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 13\ln x + 6 = 0$
 4. حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة: $\log(x^2 + 81) = \log 2 + \log 9 + \log x$

التمرين الرابع: (08ن)

1. g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 - x + e^x$
1. ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
 2. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
1. f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$
- (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$
1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 2. أ. بين أن: $f'(x) = e^{-x} g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .
ب. شكل جدول تغيرات الدالة f .
 3. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $-1 < \alpha < 0$
 4. أ. برهن أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
ب. أدرس وضعية (C_f) و (T) .
 5. أرسم (T) والمنحنى (C_f) .
 6. لتكن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $H(x) = (-x - 1)e^{-x}$
أ. برهن أن H أصلية للدالة $h(x) = xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$.
ب. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمماس (T) والمستقيمين اللذين معادلتهما:
 $x = 3$ ، $x = 1$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني (20 نقطة)

التمرين الأول (04 ن):

لتكن الدالة f المعرفة بجدول تغيراتها وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-4	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$

أجب بصح او خطأ مع تبرير اجابتك:

1. المستقيم ذو المعادلة $y = -1$ مقارب للمنحنى (C_f) .
2. المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 5$ في نقطتين.
3. مماس المنحنى (C_f) في النقطة $A(1;4)$ موازي لمحور الفواصل.
4. العدد $\int_{-4}^{-3} f(x)dx$ يمثل مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x = -3$ و $x = -4$

التمرين الثاني (04 ن)

يعطى الجدول التالي كلفة استهلاك الكهرباء من طرف عائلات معينة من مدينة ما خلال سنة (مقدرة بآلاف الدينانير)

السنة	2011	2013	2014	2015	2017
رتبة السنة x_i	1	3	4	5	7
الكلفة y_i (بآلاف الدينانير)	29	35	52	71	101

1. أ) مثل سحابة النقط $M_i(x_i; y_i)$ في معلم متعامد ($1cm$ لكل سنة على محور الفواصل و 10 آلاف دينار على محور الترتيب) .
ب) هل يمكن تسوية سحابة النقط السابقة بتعديل خطي؟ برّر.
2. نبحث في هذا الجزء عن تعديل آخر (تدور النتائج الى 10^{-2})
أ- اتمم الجدول التالي

رتبة السنة x_i	1	3	4	5	7
$z_i = \ln y_i$	3,37				

- ب- اوجد إحداثيي النقطة المتوسطة $G(\bar{x}; \bar{z})$ لسحابة النقط $M'_i(x_i; z_i)$
- ت- بين ان معادلة مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي: $z = 0,22x + 3,07$
3. أ- تحقق ان $y = ke^{0,22x}$ حيث k عدد حقيقي يطلب تعيينه.
- ب- احسب تقدير كلفة استهلاك العائلات للكهرباء سنة 2020.

التمرين الثالث: (04ن)

اجتاح وباء كورونا-كوفيد-الجزائر سنة 2020 حيث في نهاية شهر مارس بلغ عدد المصابين 626 مصاب. لاحظ الأطباء أن في نهاية كل شهر يزداد عدد المصابين بأربعة أضعاف عن الشهر السابق في حين بلغت عدد حالات الشفاء 1410 شخص. نرمز بـ u_n إلى عدد المصابين بالفيروس خلال نهاية كل شهر.

1. أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم بين أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية.
2. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n - 1410$
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 470 - u_n$
أ- بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
4. أ- ما هو عدد المصابين المتوقع خلال نهاية شهر سبتمبر 2020؟
ب- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ وفسر هذه النتيجة
- ج- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

التمرين الرابع(08ن)

- I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + \ln x - 2$
 1. أدرس اتجاه تغير الدالة g .
 2. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
 3. أنجز جدول تغيرات الدالة g .
 4. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.30 < \alpha < 1.35$
 5. استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.
- II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 2cm)

 1. أحسب النهايات $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 2. بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$.
 3. استنتج اتجاه تغير f ثم أنجز جدول تغيرات الدالة f .
 4. أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ كمستقيم مقارب مائل عند $+\infty$.
ب- أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (D) .
 5. أنشئ (C_f) و (D) . نأخذ $f(\alpha) = 1.85$.
- III. لتكن الدالة G المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $G(x) = \frac{x^3}{3} + x \ln x - 3x$
 - أ- أحسب $G'(x)$.
 - ب- استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0; +\infty[$ التي تحقق : $G(1) = 1$.

تصحيح الموضوع التجريبي الأول

التمرين الأول (04ن):

$$u_0 = 3 \text{ و } u_{n+1} = 3u_n - 4$$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 2$ (0.5ن)

لدينا: $u_0 = 3$ و $3 > 2$ إذا الخاصية محققة من أجل $n = 0$
نفرض من أجل كل $n \in \mathbb{N} : u_n > 2$ صحيحة ونثبت

$$\text{صحة } u_{n+1} > 2$$

$$\text{لدينا: } u_n > 2 \text{ ومنه: } 3u_n - 4 > 3 \times 2 - 4 = 2$$

ذا: $u_{n+1} > 2$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع $u_n > 2$

2. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة. (0.5 ن)

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - u_n = 3u_n - 4 - u_n = 2u_n - 4$$

ولدينا: $u_n > 2$ ومنه: $u_{n+1} - u_n > 0$ إذا (u_n) متزايدة

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n

$$\text{ب: } v_n = u_n - 2$$

أ- تبين أن المتتالية (v_n) هندسية وتحديد أساسها

وحدها الأول. (0.5ن)

$$\text{لدينا: } v_n = u_n - 2 \text{ ومنه: } v_{n+1} = u_{n+1} - 2$$

$$\text{ومنه: } v_{n+1} = 3u_n - 4 - 2 = 3(u_n - 2) = 3v_n$$

$$\text{وعليه: } v_{n+1} = 3v_n$$

إذا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 3$ وحدها الأول

$$(0.25\text{ن}) v_0 = u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n واستنتاج عبارة u_n بدلالة n

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه: } v_n = 3^n \text{ (0.25ن)}$$

$$\text{ومنه: } u_n = v_n + 2 = 3^n + 2 \text{ (0.25ن)}$$

ج- حساب المجموع: (0.75ن)

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = v_0 + 2 + v_1 + 2 + \dots + v_n + 2$$

$$\text{ومنه: } S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (2 + 2 + \dots + 2)$$

$$\text{ومنه: } S_n = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + 2(n+1) \text{ إذا:}$$

$$S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{-2} + 2(n+1)$$

4. نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي

$$n : w_n = \ln(u_n - 2)$$

أ- تبين أن (w_n) متتالية حسابية (0.5 ن)

$$w_{n+1} - w_n = \ln(u_{n+1} - 2) - \ln(u_n - 2)$$

$$= \ln(3u_n - 4 - 2) - \ln(u_n - 2)$$

$$= \ln(3u_n - 6) - \ln(u_n - 2) = \ln\left(\frac{3u_n - 6}{u_n - 2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{3(u_n - 2)}{u_n - 2}\right)$$

$$\text{ومنه: } w_{n+1} - w_n = \ln 3$$

إذا: (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln 3$ وحدها الأول w_0

$$\text{حيث: } w_0 = \ln(u_0 - 2) = \ln(3 - 2) = 0 \text{ (0.25ن)}$$

التعبير عن w_n بدلالة $n : w_n = w_0 + nr = n \ln 2$

ب- حساب المجموع: (0.25ن)

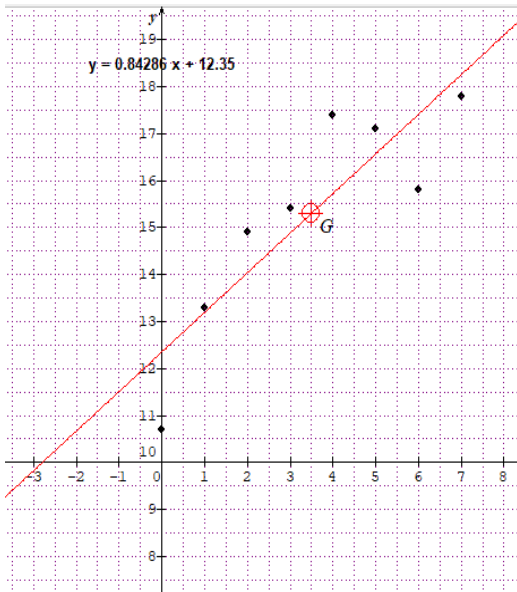
$$S'_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n = (n+1) \left(\frac{w_0 + w_n}{2} \right)$$

$$S'_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n = (n+1) \left(\frac{w_0 + w_n}{2} \right)$$

$$\text{إذا: } = (n+1) \left(\frac{n \ln 2}{2} \right)$$

التمرين الثاني (04ن)

1. تمثيل سحابة النقط (0.5 ن)



2. حساب إحداثيات النقطة المتوسطة $G(\bar{x}; \bar{y})$ وتعليمها

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{0+1+2+3+4+5+6+7}{8} \\ \bar{y} = \frac{10.7+13.3+14.9+15.4+17.4+17.1+15.8+17.8}{8} \end{cases}$$

$$\text{ومنه: } \begin{cases} \bar{x} = 3.5 \\ \bar{y} = 15.3 \end{cases} \text{ (0.25ن) + (0.5ن+0.5ن)}$$

3. أ- تبين أن معادلة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا

$$\text{هي: } y = 0.84x + 12.35$$

$$a = \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \bar{x} \bar{y}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\frac{1}{8} \times 463.8 - 3.5 \times 15.3}{\frac{1}{8} \times 42} = 0.8428$$

$$\text{ومنه: } a \approx 0.84 \text{ (0.01ن)}$$

$$\text{(0.25ن) } b = \bar{y} - a\bar{x} = 15.3 - 0.8428 \times 3.5 = 12.35$$

$$\text{إذا: } y = 0.84x + 12.35$$

ب- ايجاد قيمة رأس مال هذه المقاولات في سنة 2023

(ن0.5)

رتبة 2023 هي 20 ومنه: $y = 0.84 \times 20 + 12.35 = 29.15$

4. اوجد السنة التي سيتضاعف رأس مال هذه المقاولات

الابتدائي (يصبح 21,4 مليار). (ن0.5)

$y = 21.4$ تكافئ: $0.84x + 12.35 = 21.4$

ومنه: $x = \frac{21.4 - 12.35}{0.84} = 10.77 \approx 11$

إذا: السنة التي سيتضاعف رأس مال هذه المقاولات
الابتدائي هي: 2014

التمرين الثالث (ن04):

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$$

1. التحقق ان $x = 2$ حل للمعادلة $P(x) = 0$ (ن0.5)

$$P(2) = 2 \times 2^3 + 2^2 - 13 \times 2 + 6 = 16 + 4 - 26 + 6 = 0$$

ومنه: $x = 2$ حل للمعادلة $P(x) = 0$

تحقق أنه من اجل كل عدد حقيقي x (ن0.5)

$$P(x) = (x-2)(2x^2 + 5x - 3)$$

$$(x-2)(2x^2 + 5x - 3) = 2x^3 + 5x^2 - 3x - 4x^2 - 10x + 6$$

$$= 2x^3 + x^2 - 33x + 6 = P(x)$$

3. أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$ (ن0.75)

$$P(x) = 0 \text{ تكافئ } (x-2)(2x^2 + 5x - 3) = 0$$

$$\text{ومنه: } \begin{cases} 2x^2 + 5x - 3 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \text{ أو } \text{ومنه:}$$

$$S = \{-3; 0.5; 2\} \text{ إذا: } \begin{cases} \Delta = 49, x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين ذات المجهول x التاليتين:

$$2(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 13 \ln x + 6 = 0 \text{ (ن0.75)}$$

نضع: $\ln x = X$ تصبح المعادلة

$$2X^3 + X^2 - 13X + 6 = 0$$

السؤال السابق نجد:

$$\text{إذا: } \begin{cases} x_1 = e^{-3} \\ x_2 = e^{0.5} \\ x_3 = e^2 \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} \ln x_1 = -3 \\ \ln x_2 = 0.5 \\ \ln x_3 = 2 \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} X_1 = -3 \\ X_2 = 0.5 \\ X_3 = 2 \end{cases}$$

$$S = \{e^{-3}; e^{0.5}; e^2\}$$

لدينا: $6e^{-3x} + e^{-x} - 13e^{-2x} + 2 = 0$ (ن0.75)

$$\text{ومنه: } \frac{6}{e^{3x}} + \frac{1}{e^x} - \frac{13}{e^{2x}} + 2 = 0$$

$$\text{ومنه: } \frac{6}{e^{3x}} + \frac{e^{2x}}{e^{3x}} - \frac{13e^x}{e^{3x}} + \frac{2e^{3x}}{e^{3x}} = 0$$

ب. شكل جدول تغيرات الدالة f (ن0.5)

$$\text{ومنه: } \frac{2e^{3x} + e^{2x} - 13e^x + 6}{e^{3x}} = 0 \text{ تكافئ}$$

$$2e^{3x} + e^{2x} - 13e^x + 6 = 0$$

نضع: $X = e^x$ تصبح المعادلة $2X^3 + X^2 - 13X + 6 = 0$
السؤال السابق نجد:

$$\text{ومنه: } \begin{cases} e^{x_1} = -3 \text{ رفض} \\ e^{x_2} = 0.5 \\ e^{x_3} = 2 \end{cases} \text{ ومنه: } \begin{cases} X_1 = -3 \\ X_2 = 0.5 \\ X_3 = 2 \end{cases}$$

$$S = \{\ln 0.5; \ln 2\} \text{ إذا: } \begin{cases} x_1 = \ln 0.5 \\ x_2 = \ln 2 \end{cases}$$

4. حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة: (ن0.75)

$$\log(x^2 + 81) = \log 2 + \log 9 + \log x$$

$$x^2 + 81 = 18x \text{ ومنه } \log(x^2 + 81) = \log(18x)$$

ومنه: $x^2 - 18x + 81 = 0$ ومنه: $\Delta = 0$ ومنه المعادلة تقبل

$$\text{حل مضاعف هو: } x = \frac{-b}{2a} = \frac{18}{2} = 9 \text{ إذا: } S = \{9\}$$

التمرين الرابع (ن07):

1. g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 - x + e^x$

1. دراسة اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها (ن0.75)

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و: $g'(x) = -1 + e^x$

$g'(x) = 0$ تكافئ: $-1 + e^x = 0$ ومنه: $e^x = 1$ إذا: $x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

2. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ (ن0.5)

من جدول التغيرات نجد: $g(x) \geq g(0) \geq 2 > 0$

$$\text{II. } f(x) = x + 1 + xe^{-x}$$

1. حساب النهايات

$$(ن0.25) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1 + xe^{-x}) = -\infty$$

$$(ن0.25) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 + xe^{-x}) = +\infty$$

2. أ. تبين أن: $f'(x) = e^{-x} g(x)$ (ن0.5)

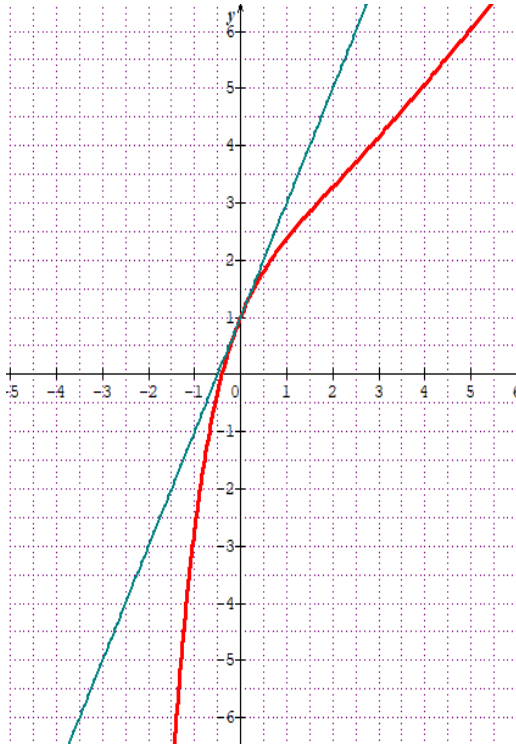
الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و:

$$f'(x) = 1 + e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(e^x + 1 - x) = e^{-x} \cdot g(x)$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : (ن0.5)

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي: الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$

5. أرسم (T) والمنحنى (C_f) (ن0.75)



6. أ- برهان أن H أصلية للدالة $h(x) = xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$ (ن0.75)

الدالة H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$H'(x) = -e^{-x} - (-x-1)e^{-x} = -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} = xe^{-x} = h(x)$$

H أصلية للدالة $h(x) = xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$

ت- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمماس (T) والمستقيمين اللذين معادلتهما:

$$x=1, x=3 \text{ (ن0.75)}$$

$$\text{لدينا: } S = \int_1^3 [y - f(x)] dx = \int_1^3 (x - xe^{-x}) dx$$

$$S = \left[\frac{1}{2}x^2 - (-x-1)e^{-x} \right]_1^3 = 4.7 - 1.24 = 3.46 \text{ u.a. ومنه:}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم

تحقق أن $-1 < \alpha < 0$ (ن0.75)

الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $0 \in]-\infty; +\infty[$ إذا حسب مبرهنة القيم

المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$

التحقق أن $-1 < \alpha < 0$ (ن0.25)

$$f(0) \times f(-1) < 0 \text{ و } f(0) = 1, f(-1) = -e$$

إذا: $-1 < \alpha < 0$

4. أ- برهن أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مماس

للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 (ن0.75)

$$\text{لدينا: } (T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\text{ومنه: } y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$\text{ومنه: } y = 2x + 1 \text{ وهو المطلوب.}$$

ب. دراسة وضعية (C_f) و (T) (ن0.75)

دراسة إشارة الفرق: $f(x) - y = x + 1 + xe^{-x} - 2x - 1$

$$= xe^{-x} - x = x(e^{-x} - 1)$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	0	+
$e^{-x} - 1$	+	0	-
$f(x) - y$	-	0	-
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	تماس	(C_f) تحت (Δ)

الموضوع الثاني

2. اتمام الجدول (ن0.5)

x_i رتبة	1	3	4	5	7
$z_i = \ln y_i$	3.37	3.56	3.95	4.26	4.62

ب- ايجاد إحداثي النقطة المتوسطة $G(\bar{x}; \bar{z})$ لسحابة

النقط $M'_i(x_i; z_i)$ (ن01)

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1+3+4+5+7}{5} = 4 \\ \bar{z} = \frac{3.37+3.56+3.95+4.26+4.62}{5} = 3.95 \end{cases}$$

ومنه: $G(4; 3.95)$

3. تبين أن معادلة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هي:

$$y = 0.22x + 3.07 \quad (\text{ن0.5})$$

$$a = \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i z_i \right) - \bar{x} \bar{z}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\frac{1}{5} \times 83.49 - 4 \times 3.95}{\frac{1}{5} \times 20} = 0.22$$

$$b = \bar{z} - a\bar{x} = 3.95 - 0.22 \times 4 = 3.07 \quad (\text{ن0.25})$$

$$y = 0.22x + 3.07 \quad \text{إذا:}$$

4. أ- تحقق أن $y = ke^{0.22x}$ حيث k عدد حقيقي يطلب

تعيينه. (ن0.5)

لدينا: $z = \ln y$ ومنه: $y = e^z$ ومنه: $y = e^{0.22x+3.07}$

ومنه: $y = e^{0.22x} \times e^{3.07}$ وعليه: $y = 21.54e^{0.22x}$

إذا: $k = 21.54$

ب- حساب تقدير كلفة استهلاك العائلات للكهرباء سنة

2020. (ن0.5)

رتبة 2020 هي: 10

$$y = 21.54e^{0.22 \times 10} = 194.40$$

التمرين الثالث (ن04):

1. حساب u_3, u_2, u_1

$$u_1 = 4 \times 626 - 1410 = 1094, \quad u_0 = 626 \quad (\text{ن0.25})$$

$$u_2 = 4 \times 1094 - 1410 = 2966 \quad (\text{ن0.25})$$

$$u_3 = 4 \times 2966 - 1410 = 10454 \quad (\text{ن0.25})$$

تبين أن (u_n) ليست حسابية ولا هندسية

$$\text{لدينا: } u_2 - u_1 = 2966 - 1094 = 1872$$

$$\text{و } u_3 - u_2 = 10454 - 2966 = 7488$$

(ن0.25) ليست حسابية (u_n) ومنه $u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{2966}{1094} = 2.71, \quad \frac{u_3}{u_2} = \frac{10454}{2966} = 3.52$$

(ن0.25) ليست هندسية (u_n) ومنه $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$

التمرين الأول (ن04):

الإجابة بصح أو خطأ مع التبرير

1. خ: (ن0.75+ن0.25)

المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب للمنحنى (C_f) .

2. ص: (ن0.75+ن0.25)

الدالة f متزايدة على المجال $]1; +\infty[$ وتأخذ قيمها في

المجال $]4; +\infty[$ و $5 \in [4; +\infty[$

الدالة f متناقصة على المجال $]1; 1]$ وتأخذ قيمها في

المجال $]4; +\infty[$ و $5 \in [4; +\infty[$

إذا المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 5$

في نقطتين

3. ص: (ن0.75+ن0.25)

لأن: $f'(1) = 0$

4. خ: (ن0.75+ن0.25)

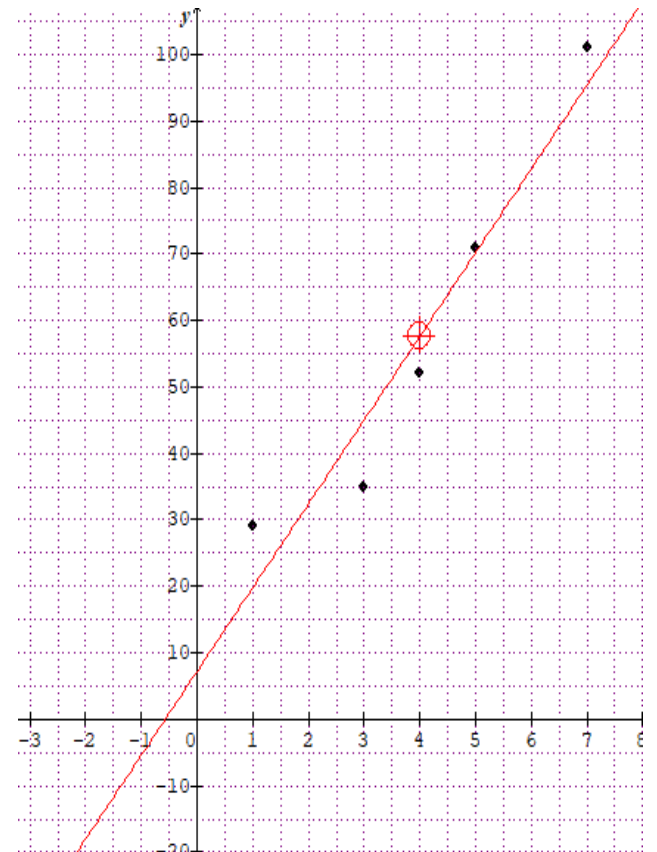
لأن: $f(x) \leq 0$ على المجال $[-4; -3]$ إذا: مساحة الحيز

المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين

ذو المعادلتين $x = -4$ و $x = -3$ هي العدد $\int_{-4}^{-3} -f(x) dx$

التمرين الثاني (ن04):

1. أ- سحابة النقط (ن0.5)



ب- لا يمكن تسوية سحابة النقط السابقة بتعديل خطي

لأن لها شكل غير متطاول. (ن0.25)

2. تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n (ن0.25)

$$u_{n+1} = 4u_n - 1410$$

لدينا: $u_2 = 4u_1 - 1410$ ، $u_1 = 4u_0 - 1410$

$$u_{n+1} = 4u_n - 1410 \text{ ومنه: } u_3 = 4u_2 - 1410$$

$$v_n = 470 - u_n \text{ .3}$$

أ. تبين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها

وحدها الأول. (ن0.5)

لدينا: $v_{n+1} = 470 - u_{n+1}$ ومنه: $v_{n+1} = 470 - 4u_n + 1410$

ولدينا: $u_n = 470 - v_n$ إذ:

$$v_{n+1} = 470 - 1880 + 4v_n + 1410$$

$$\text{ومنه: } v_{n+1} = 4v_n$$

إذا (v_n) متتالية هندسية أساسه $q = 4$ وحدها الأول

$$(ن0.25) v_0 = 470 - u_0 = 470 - 626 = -156$$

ت- كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج عبارة u_n بدلالة n .

$$(ن0.25) v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه: } v_n = -156 \times 4^n$$

$$(ن0.25) u_n = 470 - v_n \text{ ومنه: } u_n = 470 + 156 \times 4^n$$

4.أ- ما هو عدد المصابين المتوقع خلال نهاية شهر

سبتمبر 2020؟ (ن0.25)

رتبة 2020 هي 6: $u_6 = 470 + 156 \times 4^6 = 639446$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$ (ن0.25)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (470 + 156 \times 4^n) = +\infty$$

تفسير هذه النتيجة: المتتالية (u_n) متباعدة وعدد

المصابين في تزايد مستمر. (ن0.25)

ج- حساب بدلالة n المجموع S_n : (ن0.5)

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= 470 - v_1 + 470 - v_2 + \dots + 470 - v_n$$

$$= (470 + 470 + \dots + 470) - (v_1 + v_2 + \dots + v_n)$$

$$= 470n + 624 \times \frac{1-4^n}{1-4} = 470n - 208(1-4^n)$$

التمرين الرابع (ن07):

أ. g معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 + \ln x - 2$

1. دراسة اتجاه تغير الدالة g (ن0.75)

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و:

$$g(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0 \text{ ومنه الدالة } g \text{ متزايدة تماما على}$$

$$]0; +\infty[$$

2. حساب النهايات

$$(ن0.25) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x - 2) = +\infty$$

$$(ن0.25) \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + \ln x - 2) = -\infty$$

3. انجاز جدول تغيرات الدالة g (ن0.25)

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$$1.30 < \alpha < 1.35 \text{ (ن0.75)}$$

الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[1.30; 1.35]$ و

$$g(1.35) = 0.12 \text{ ، } g(1.30) = -0.04$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث:

$$1.30 < \alpha < 1.35$$

5. استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$ (ن0.5)

من جدول التغيرات نجد:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II. الدالة f معرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x}$

1. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ (2×ن0.25)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1 - \ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1 - \ln x}{x} \right) = +\infty$$

2. تبين أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ (ن0.5)

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و:

$$f'(x) = \frac{\left(2x - \frac{1}{x}\right) \times x - 1(x^2 + 1 - \ln x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 1 - x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 2 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

3. استنتاج اتجاه تغير الدالة f (ن0.5)

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي الدالة f متناقصة على

المجال $]-\infty; \alpha[$ ومتزايدة على المجال $]\alpha; +\infty[$

III. الدالة G معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $G(x) = \frac{x^3}{3} + x \ln x - 3x$

أ- حساب $G'(x)$. (ن0. 5)

الدالة G قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و:

$$G'(x) = x^2 + \ln x + 1 - 3$$

ومنه: $G'(x) = x^2 + \ln x - 2$

ب- استنتج دالة أصلية للدالة g على المجال $]0; +\infty[$ التي

تحقق: $G(1) = 1$. (ن0. 75)

$$G(x) = \int_1^x g(t) dt$$

$$G(x) = \int_1^x (t^2 + \ln t - 2) dt$$

$$= \left[\frac{1}{3} t^3 + t \ln t - 2t \right]_1^x$$

$$= \frac{1}{3} x^3 + x \ln x - 2x - \frac{1}{3} + 2$$

$$G(x) = \frac{1}{3} x^3 + x \ln x - 2x + \frac{5}{3}$$

بالتوفيق في بكالوريا 2023

جدول تغيرات الدالة f (ن0. 5)

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(a)$	$+\infty$

4. أ- يبين أن المنحني (C_f) يقبل المستقيم (D) الذي

معادلته $y = x$ كمستقيم مقارب مائل عند $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

ومنه (C_f) يقبل المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$

كمستقيم مقارب مائل عند $+\infty$. (ن0. 75)

ب- أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (D) . (ن0. 5)

$$f(x) - y = \frac{1 - \ln x}{x}$$

$f(x) - y = 0$ تكافئ: $1 - \ln x = 0$ ومنه: $x = 1$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
الوضع النسبي	فوق (C_f) (Δ)	تقاطع	تحت (C_f) (Δ)

إذا:

5. أنشئ (C_f) و (D) . نأخذ $f(a) = 1.85$. (ن0. 75)

