الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

ثـــانوية أبي ذر الغفاري ، خميس مليانة — فرض الثلاثي الأول
السنة الثالثة تسيير و إقتصاد — الإثنين 10 نوفمبر 2025

المـــادة : ريـــاضـــيـــات — المدة : ساعة واحدة

التمرين الأول:(12 نقطة)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=\frac{1}{2}$ وبالعلاقة التراجعية : $u_{n+1}=\frac{7}{6}u_n-\frac{9}{2}$

1. أ) أحسب قيمة الحدين u_1 و u_2
   بـ) خمن اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ليست حسابية و ليست هندسية .
2. برهن بالتراجع ومن أجل كل عدد طبيعي n أن : $u_n\leq 1$.
3. أدرس إتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=u_n-27$.
   أ) بين أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .
   بـ) أكتب عبارة الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   ج) إستنتج عبارة u_n بدلالة n .
   د) أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟
5. أ) أحسب المجموع S حيث : $S=v_2+v_3+\cdots\cdots\cdots+v_{51}$
   بـ) استنتج قيمة المجموع P حيث : $P=u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots+u_{51}$

التمرين الثاني:(08 نقاط)

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=3$ و : $u_6+u_7+u_8=156$

1. أحسب قيمة u_7 ثم إستنتج قيمة الأساس r .
2. أكتب عبارة u_n بدلالة العدد الطبيعي n .
3. أحسب الحد الثالث عشر للمتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. هل 14178 حد من حدود المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$؟ حدد رتبته .
5. أحسب المجموع S حيث : $S=u_7+u_8+u_9+\cdots\cdots\cdots+u_{2025}$

بالتوفيق للجميع

حل التمرين الأول :

1.أ) حساب قيمة الحدين : ..... 0.50+0.50ن

لدينا : $u_1=\frac{7}{6}u_0-\frac{9}{2}=\frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{2}=\boxed{-\frac{47}{12}}$

و: $u_2=\frac{7}{6}u_1-\frac{9}{2}=\frac{7}{6}\left(-\frac{47}{12}\right)-\frac{9}{2}=\boxed{-\frac{653}{72}}$

ب) تخمين إتجاه التغير : 0.50ن

بماأن : $u_0>u_1>u_2$ فإن نخمن أن :

$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{متناقصة تماما}}$

ج) تبيان أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$لا حسابية ولا هندسية :

بماأن : $u_1-u_0=-\frac{47}{12}-\frac{1}{2}=\boxed{-\frac{53}{12}}$

و : $u_2-u_1=\frac{-653}{72}+\frac{47}{12}=\boxed{\frac{-371}{72}}$

فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ليست متتالية حسابية . 0.50+0.50ن

وبماأن : $\frac{u_1}{u_0}=\frac{-47}{12}\times 2=\boxed{\frac{-47}{6}}$

و : $\frac{u_2}{u_1}=\frac{-653}{72}\times\frac{-12}{47}=\boxed{\frac{653}{282}}$

فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ليست متتالية هندسية . 0.50+0.50ن

2. البرهان بالتراجع : .... 0.50+0.50+0.50ن

التحقق : من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=\frac{1}{2}$ و $u_0\le 1$

وبالتالي الخاصية محققة من أجل $n=0$.

الفرضية :

نفرض أن : $u_n\le 1$ من أجل العدد الطبيعي n.

الإثبات : لنبين أن : $u_{n+1}\le 1$

لدينا حسب الفرضية : $u_n\le 1$ و بضرب طرفي المتباينة في $\frac{7}{6}$ نجد : $\frac{7}{6}u_n\le\frac{7}{6}$ ثم بإضافة $\frac{-9}{2}$ إلى طرفي المتباينة نجد :

$$\frac{7}{6}u_n-\frac{9}{2}\le\frac{-20}{6}\le 1$$

أي : $u_{n+1}\le 1$ وبالتالي حسب مبدأ البرهان بالتراجع

$\boxed{u_n\le 1 \text{ مهما يكن العدد الطبيعي } n}$

3. دراسة إتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: 01ن

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{7}{6}u_n-\frac{9}{2}-u_n$

$=\left(\frac{7}{6}-1\right)u_n-\frac{9}{2}$

$=\boxed{\frac{1}{6}u_n-\frac{9}{2}}$

وبما أن : $u_n\le 1$ فإنه بضرب طرفي المتباينة في $\frac{1}{6}$ نجد : $\frac{1}{6}u_n\le\frac{1}{6}$ ثم بإضافة $\frac{-9}{2}$ إلى طرفي المتباينة نجد : $\frac{1}{6}u_n-\frac{9}{2}\le\frac{-26}{6}\le 0$ أي : $u_{n+1}-u_n\le 0$

وبالتالي : $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{متناقصة تماما}}$

4.أ) تبيان أن $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$هندسية : . 0.50+0.50ن

لدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}-27=\frac{7}{6}u_n-\frac{9}{2}-27$

$=\frac{7}{6}u_n-\frac{63}{2}=\frac{7}{6}\left(u_n-\frac{\frac{63}{2}}{\frac{7}{6}}\right)$

$=\frac{7}{6}(u_n-27)=\boxed{\frac{7}{6}v_n}$

وبالتالي $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية هندسية أساسها : $q=\frac{7}{6}$

وحدها الأول : $v_0=u_0-27=\frac{1}{2}-27=\boxed{\frac{-53}{2}}$

ب) عبارة الحد العام للمتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: 01ن

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية هندسية معناه : $v_n=v_p\times q^{n-p}$

ومنه : $v_n=v_0\times\left(\frac{7}{6}\right)^n=\boxed{\frac{-53}{2}\times\left(\frac{7}{6}\right)^n}$

ج) استنتاج عبارة الحد العام لـ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: ...01ن

لدينا : $v_n=u_n-27$ ومنه : $u_n=v_n+27$

أي : $\boxed{u_n=\frac{-53}{2}\times\left(\frac{7}{6}\right)^n+27}$

د) حساب نهاية u_n : ..... 0.50+0.50ن

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-53}{2}\times\left(\frac{7}{6}\right)^{n\to+\infty}+27=\boxed{-\infty}$

وبالتالي نستنتج أن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متباعدة .

5.أ) حساب المجموع S : 01ن

$$\begin{aligned} S &= v_2 + v_3 + \cdots\cdots + v_{51} \\ &= \frac{v_2}{1-q}\left(1-q^{51-2+1}\right) \\ &= \frac{\frac{-2597}{72}}{1-\frac{7}{6}}\left(1-\left(\frac{7}{6}\right)^{50}\right) = \boxed{\frac{2597}{12}\left(1-\left(\frac{7}{6}\right)^{50}\right)} \end{aligned}$$

ب) إستنتاج المجموع P : 01ن

$$\begin{aligned} P &= u_2 + u_3 + \cdots\cdots + u_{51} \\ &= v_2 + 27 + v_3 + 27 + \cdots\cdots v_{51} + 27 \\ &= v_2 + v_3 + \cdots + v_{51} + 27 + 27 + \cdots + 27 \\ &= S + 27 \times 50 = 1350 + \frac{2597}{12}\left(1-\left(\frac{7}{6}\right)^{50}\right) \\ &= \boxed{\frac{18797}{12}\left(1-\left(\frac{7}{6}\right)^{50}\right)} \end{aligned}$$

حل التمرين الثاني :

1. حساب u_7 واستنتاج r : ..... 01+01ن

لدينا حسب خاصية الوسط الحسابي : $u_6+u_8=2u_7$

وبالتالي المعادلة : $u_6+u_7+u_8=156$ تصبح :

$3u_7=156$ ومنه : $u_7=\frac{156}{3}=\boxed{52}$

ولدينا : $u_0+7r=u_7$ ومنه : $3+7r=52$

أي : $r=\frac{49}{7}=\boxed{7}$

2. كتابة عبارة u_n بدلالة n : 01ن

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حسابية معناه :

$$u_n = u_p + (n-p)\times r$$

ومنه : $u_n = u_0 + 7\times n = \boxed{7n+3}$

3. حساب الحد الثالث عشر : 01ن

لدينا : $u_{12} = 7\times 12 + 3 = \boxed{87}$

4. تعيين رتبة الحد الذي قيمته 14178 : 02ن

لدينا : $7n+3=14178$ ومنه : $7n=14175$

أي : $n=\frac{14175}{7}=\boxed{2025\in\mathbb{N}}$ وبالتالي الحد الذي قيمته 14178 هو حد من حدود المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث : $\boxed{u_{2025}=14178}$

ورتبته : $2025+1=\boxed{2026}$

5. حساب المجموع S : 02ن

$$\begin{aligned} S &= u_7 + u_8 + u_9 + \cdots\cdots + u_{2025} \\ &= \frac{(2025-7+1)(u_7+u_{2025})}{2} \\ &= \frac{2019(52+14178)}{2} \\ &= \boxed{14365185} \end{aligned}$$