



المستوى: الثالثة ثانوي تسيير و اقتصاد ديسمبر 2020

الفرض الأول للثلاثي الأول في الرياضيات المدة: 1 سا

التمرين الأول:

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل n طبيعي، $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

1) احسب u_1, u_2, u_3 ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بـ: من أجل كل n طبيعي، $v_n = u_{n+1} - u_n$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول.

ب) عين v_n بدلالة n ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

أ) احسب S_n بدلالة n .

ب) بين أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = S_n + u_0$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

بالتوفيق

الأستاذ زوبير عبد الرحيم

التصحيح النموذجي

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases} \text{ لدينا: } (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة بـ:}$$

1) حساب u_1, u_2, u_3 :

$$u_1 = 3u_0 - 2 = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$u_2 = 3u_1 - 2 = 3(4) - 2 = 12 - 2 = 10$$

$$u_3 = 3u_2 - 2 = 3(10) - 2 = 30 - 2 = 28$$

تخمين اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

نلاحظ أن $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ، المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

2) لدينا: (v_n) متتالية عددية معرفة بـ: من أجل كل n طبيعي، $v_n = u_{n+1} - u_n$.

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يُطلب تعيين حدها الأول:

نكتب v_{n+1} بدلالة v_n .

$$\text{لدينا: } v_n = u_{n+1} - u_n$$

$$\text{ومنه: } v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = (3u_{n+1} - 2) - (3u_n - 2) = 3u_{n+1} - 2 - 3u_n + 2 = 3u_{n+1} - 3u_n$$

$$\text{وعليه: } v_{n+1} = 3(u_{n+1} - u_n) = 3v_n$$

$$\boxed{v_{n+1} = 3v_n} \text{ أي:}$$

$$\boxed{v_0 = u_1 - u_0 = 4 - 2 = 2} \text{ إذن: } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \boxed{q = 3} \text{ وحدها الأول}$$

ب) تعيين v_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه: } \boxed{v_n = 2(3)^n}$$

استنتاج أن المتتالية (u_n) متزايدة:

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$\text{لدينا: } 0 < 2(3)^n = v_n = u_{n+1} - u_n \text{، إذن: } (u_n) \text{ متزايدة تماما.}$$

3) لدينا: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

أ) حساب S_n بدلالة n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \left(\frac{1 - (3)^{(n-1)-0+1}}{1-3} \right) = 2 \left(\frac{1-3^n}{-2} \right) = -(1-3^n)$$

$$S_n = 3^n - 1 \text{ ومنه:}$$

ب) تبين أن من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = S_n + u_0$:

ط1: يمكن استعمال الاستدلال بالتراجع.

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} \text{ لدينا: ط2}$$

$$S_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_n - u_{n-1}) = -u_0 + u_n \text{ ومنه:}$$

$$u_n = S_n + u_0 \text{ إذن:}$$

استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

$$u_n = S_n + u_0 = (3^n - 1) + 2 = 3^n + 1 \text{ لدينا:}$$