



جانفي 2021

المستوى: الثالثة ثانوي تسيير و اقتصاد

المدة: 1 سا

الفرض الثاني للثلاثي الأول في الرياضيات

تمارين:

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4}$.

1) احسب الحدود u_1, u_2 و u_3 .

2) أبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n < 2$.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 2$.

أبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

بداكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

جما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟

4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد

طبيعي n فإن: $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$.

بالتوفيق

الأستاذ زوبير عبد الرحيم

التصحيح النموذجي

الحل :

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة بـ $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4} \end{cases}$
 $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{2}{4}$ معناه:

1) حساب الحدود u_1, u_2, u_3 :

$$u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}(1) + \frac{2}{4} = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4}$$

$$u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{2}{4} = \frac{15+8}{16} = \frac{23}{16}$$

$$u_3 = \frac{3}{4}u_2 + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{23}{16}\right) + \frac{2}{4} = \frac{69+32}{64} = \frac{101}{64}$$

2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n < 2$:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$

المرحلة 01: من أجل $n = 0$

لدينا: $u_0 = 1 < 2$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

• نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $u_n < 2$ (فرضية التراجع)

• ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $u_{n+1} < 2$

البرهان: حسب فرضية التراجع، لدينا: $u_n < 2$

$$\text{ومنه: } \frac{3}{4}u_n < \frac{6}{4}$$

$$\text{وعليه: } \frac{3}{4}u_n + \frac{2}{4} < \frac{6}{4} + \frac{2}{4}$$

$$\text{أي: } u_{n+1} < 2$$

وبالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n , $u_n < 2$.

3) لدينا: (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n - 2$.

أثبت أن (v_n) متتالية هندسية نطلب تحديد أساسها وحدها الأول:

نكتب v_{n+1} بدلالة v_n .

لدينا: $v_n = u_n - 2$ ومنه:

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{3}{4}u_n + \frac{2}{4} - 2 = \frac{3}{4}u_n - \frac{6}{4} = \frac{3}{4}u_n - \frac{3 \times 2}{4} = \frac{3}{4}(u_n - 2) = \frac{3}{4}v_n$$

$$\text{أي: } v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 2 = 1 - 2 = -1$.

بكتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه: } v_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$:

$$\text{لدينا: } v_n = u_n - 2 \text{ إذن: } u_n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2$$

حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\text{لدينا: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ لأن } -1 < \frac{3}{4} < 1 \text{، إذن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

4) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$:

$$\text{لدينا: } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{3}{4}} \right) = - \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} \right)$$

$$\text{ومنه: } S_n = -4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \right) = 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n - 4$$

استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$:

$$\text{لدينا: } u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_n + 2)$$

$$\text{ومنه: } u_0 + u_1 + \dots + u_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + 2(n - 0 + 1)$$

$$\text{وعليه: } u_0 + u_1 + \dots + u_n = S_n + 2n + 2 = 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n - 4 + 2n + 2 = 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$$