

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول : 05 نقاط

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل : (الإجابة بدون تعليل مرفوضة)

- العددان $\frac{202\pi}{10}$ و $\frac{11\pi}{5}$ قياسان لنفس الزاوية الموجهة .
- إذا كان $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{5\pi}{12}$ فإن $(\vec{u}; -2\vec{v}) = -\frac{5\pi}{12}$
- حلول المعادلة $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ في $\mathbb{R}$ هي : $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- حلول المتراجحة $-2\sin 5x \geq -1$ في المجال $[0; 2\pi]$ هي : $S = \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$
- من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -2\sin x$

التمرين الثاني : 06 نقاط

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، لتكن النقط $A(1, 2)$ ، $B(3, 4)$ و $C(2, 1)$. I منتصف القطعة $[AB]$ ، النقطة التي تحقق $\vec{JB} = 4\vec{JC}$ ، و لتكن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; 1), (C, -4)\}$.

- عين إحداثيات النقطة G ثم أنشئ النقط A ، B ، C و G .
- بين أن المستقيمين (IC) و (AJ) يتقاطعان في نقطة يطلب تعيينها .
- عين ثم أنشئ المجموعة (T) مجموعة النقط M التي تحقق : $\|\vec{MA} + \vec{MB} - 4\vec{MC}\| = \frac{2}{\sqrt{2}} \|\vec{AC}\|$. لتكن النقطة E من المستوي التي تحقق : $\vec{BE} = \vec{AB} + 2\vec{BG}$.
- بين أن E هي صورة G بتحاكي مركزه A يطلب تعيين نسبته .
ليكن h التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .
- عين طبيعة المجموعة (T') صورة المجموعة (T) بالتحاكي h مبرزا عناصرها المميزة ثم أنشئها .

التمرين الثالث : 09 نقاط

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R} - \{-2\}$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- أدرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف ، استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب يطلب تعيين معادلته .

2 ■ تحقق أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$.

3 ■ استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4 ■ أثبت أنه من أجل كل x من D_f : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$ ، حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها .

5 ■ استنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته .

6 ■ أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

7 ■ أحسب $f(0)$ ثم أنشئ كل من (Δ) و (C_f) .

انتهى

بالتوفيق



تصحيح إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول (05 نقاط)

1. صحيح التعليل : لدينا:

$$\frac{202\pi}{10} - \frac{11\pi}{5} = 18\pi$$

$$= 2 \times 9\pi$$

2. خطأ التعليل : لدينا:

$$(2\vec{u}; -2\vec{v}) = (\vec{u}; \vec{v}) + \pi$$

$$= \frac{17\pi}{12}$$

3. خطأ التعليل : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $2\cos x - \sqrt{3} = 0$ تكافئ : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أي $\cos x = \cos \frac{\pi}{6}$ و عليه :

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{-\pi}{6} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

4. خطأ التعليل : من أجل كل x من $[0; 2\pi]$: $-2\sin 5x \geq -1$ تكافئ : $\sin 5x \leq \frac{1}{2}$ و عليه:

$$5x \in \left[0; \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi \right]$$

إذن :

$$S = \left[0; \frac{\pi}{30} \right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{5} \right]$$

5. صحيح التعليل : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)$$

$$= \cos x - 2\sin x - \cos x$$

$$= -2\sin x$$

التمرين الثاني (06 نقطة)

1. تعيين إحداثيات G :

$$G \text{ مرجح الجملة المثقلة } \{(A; 1), (B; 1), (C, -4)\} \text{ و منه : } G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}\right)$$

$$G\left(2; -\frac{1}{2}\right)$$

2. إثبات أن المستقيمين (IC) و (AJ) يتقاطعان في نقطة يطلب تعيينها :

لدينا I منتصف القطعة $[AB]$ و منه I مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;1)\}$. باستخدام خاصية التجميع
 $G \in (IC)$ و منه $\{(I;2), (C;-4)\}$ (★)
من جهة أخرى $\vec{JB} = 4\vec{JC}$ و منه J مرجح الجملة المثقلة $\{(B;1), (C;-4)\}$. باستخدام خاصية التجميع G
مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (J;-3)\}$ و منه $G \in (AJ)$ (★★)
من (★) و (★★) نستنتج أن : المستقيمين (IC) و (AJ) يتقاطعان في النقطة G .

3. تعيين المجموعة (T) :

بما أن G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;1), (C;-4)\}$ فإنه من أجل كل نقطة M من المستوي :

$$\begin{aligned}\|\vec{MA} + \vec{MB} - 4\vec{MC}\| &= \|\vec{-2MG}\| \\ &= 2MG\end{aligned}$$

و لدينا : $\|\vec{AC}\| = \sqrt{2}$ و منه $\|\vec{MA} + \vec{MB} - 4\vec{MC}\| = \frac{2}{\sqrt{2}} \|\vec{AC}\|$ تكافئ : $MG = 1$ و منه المجموعة (T)
عبارة عن دائرة مركزها G و نصف قطرها 1 .

4. تعيين نسبة التحاكي الذي يحول G إلى E :

$$\vec{BE} = \vec{AB} + 2\vec{BG}$$

$$\vec{BA} + \vec{AE} = \vec{AB} + 2\vec{BA} + 2\vec{AG}$$

$$\vec{AE} = 2\vec{AG} \quad \text{أي :}$$

و منه E هي صورة G بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته 2.

5. تعيين المجموعة (T') :

صورة الدائرة (T) بالتحاكي h هي دائرة (T') مركزها E و نصف قطرها r حيث $r = 2$.

التمرين الثالث (09 نقطة)

1. نهايات الدالة f :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty\end{aligned}$$

• إشارة البسط :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$ إشارة		0	
	-		+

$x-2=0$ تكافئ : $x=2$ و عليه :

ومنه :

$$\begin{aligned} \lim_{x \leq 2} f(x) = -\infty & \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \leq 2} x^2 - 3x + 3 = 1 \quad \text{بما أن} \\ \lim_{x \geq 2} f(x) = +\infty & \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \geq 2} x^2 - 3x + 3 = 1 \quad \text{بما أن} \end{aligned}$$

نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ مستقيم مقارب لـ (C_f) موازي لمحور الترتيب .

2. تعيين المشتقة :

الدالة f قابلة للإشتقاق على D_f و :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-3)(x-2) - (x^2-3x+3)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

3. اتجاه التغير : بما أن $(x-2)^2 \geq 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط و من الشكل :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
إشارة $f'(x)$	+	0	-	-	0	+

و عليه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 1]$ و على المجال $[3; +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]-1; 2[$ و على المجال $]-2; 3]$.

• جدول التغيرات :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$			-1		$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$				3	

4. تعيين الأعداد a, b و c بحيث $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من D_f :

$$\begin{aligned} ax + b + \frac{c}{x-2} &= \frac{(ax+b)(x-2) + c}{x-2} \\ &= \frac{ax^2 + (-2a+b)x - b + c}{x-2} \end{aligned}$$

بالمطابقة مع عبارة f نجد : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$

5. تعيين معادلة المستقيم المقارب المائل :

لدينا :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

و عليه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$ و $+\infty$ معادلته $y = x - 1$: (Δ) .

6. دراسة الوضع النسبي:

ندرس إشارة $[f(x) - (x-1)]$ أي إشارة $\frac{1}{x-2}$. وهي من إشارة $x-2$. و عليه

x	$-\infty$	2	$+\infty$
إشارة $\frac{1}{x-2}$	-		+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

7. التمثيل البياني:

