المادّة: رياضيات
المستوى: 2 علوم تجريبية

التّاريخ: 2022/12/08
المدّة: ساعتين

اختبار الفصل الأوّل

التّمرين الأوّل: (04 نقاط)

$P(x)$ و $Q(x)$ كثيري حدود حيث: $P(x)=2x^3-6x^2-8x+24$ و $Q(x)=x^3-7x+6$.

1. تحقّق أنّ $P(-2)=0$ و $Q(2)=0$.
2. حلّل كلا من $P(x)$ و $Q(x)$ إلى جداء عوامل من الدّرجة الأولى، ثمّ استنتج تحليلا لـ $P(x)+Q(x)$.
3. استنتج حلول المعادلة $P(x)+Q(x)=0$.
4. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $3x\sqrt{x}-6x-15\sqrt{x}+30=0$.

(لاحظ أنّ $P(x)+Q(x)=3x^3-6x^2-15x+30$).

التّمرين الثّاني: (09 نقاط)

I. لتكن الدّالة g المعرّفة على المجال $[-2;4]$ بـ: $g(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x}{x^2-2x+2}$. حيث α و β عددان حقيقيان.

1. بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[-2;4]$ فإنّ: $g'(x)=\dfrac{(-2\alpha-\beta)x^2+4\alpha x+2\beta}{(x^2-2x+2)^2}$.
2. عيّن α و β بحيث منحنى الدالة g يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النّقطة $A(1;-1)$.

II. نعتبر الدّالة f المعرّفة على المجال $[-2;4]$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[-2;4]$ فإنّ: $f'(x)=\dfrac{4(x-1)}{(x^2-2x+2)^2}$.
2. ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها على المجال $[-2;4]$.
3. اعط حصر للدّالة f على المجال $[-1;1]$.
4. بيّن أنّ المستقيم ذو المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f).
5. اكتب معادلة لكل من (Δ_1) و (Δ_2) مماسي (C_f) عند نقطتي تقاطعه مع حامل محور الفواصل.
6. ادرس الوضع النّسبي بين (C_f) و المستقيم ذو المعادلة $y=-x$، محدّدا إحداثيات نقط تقاطعهما.
7. ارسم (Δ_1)، (Δ_2) و (C_f) على المجال $[-2;4]$. (وحدة الرّسم $2cm$)
8. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=\dfrac{m}{5}$.

III. لتكن الدّالة h المعرّفة على $[-3;3]$ بـ: $h(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$. (C_h) تمثيلها البياني.

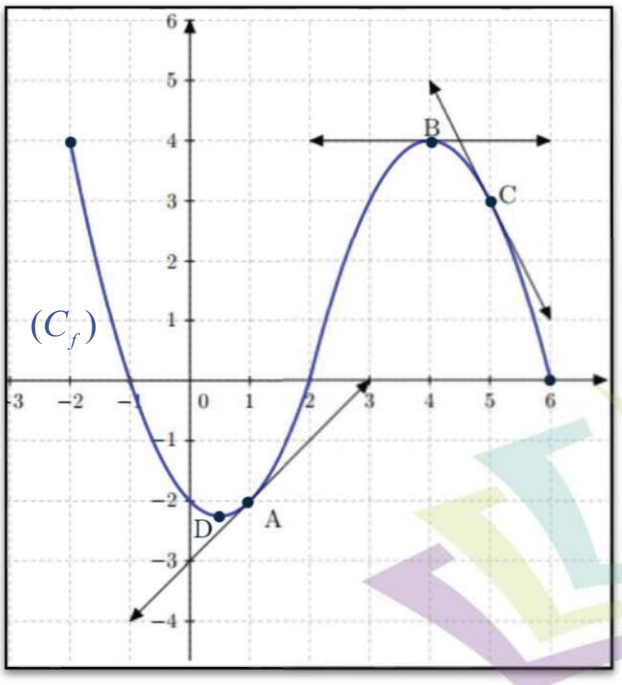
تحقّق أنّ $h(x)=f(x+1)+1$، اشرح كيفيّة رسم (C_h) ثمّ ارسمه في المعلم السابق.

التّمرين الثّالث: (07 نقاط)

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $[-2;6]$ و f' دالتها المشتقة.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

لتكن النقط $A(1;-2)$ ، $B(4;4)$ ، $C(5;3)$ و $D\left(\frac{1}{2};\frac{-9}{4}\right)$. (انظر الشّكل)



I. بالاستعانة بالبيان:

1. عين كلا من: $f'(4)$ ، $f'(1)$ و $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}$.
2. اكتب معادلة مماس المنحنى (C_f) عند النقطة A .
3. باستعمال التقريب التآلفي للدالة f بجوار 1، عين قيمة مقربة للعدد $f(0{,}998)$.
4. حل بيانيا المعادلة $f(x)\ 0$ ، ثم عين إشارة $f(x)$.
5. عين إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
6. عين القيم الحدية المحلّية للدالة f .

II. نعتبر الدالة g المعرفة بـ: $\sqrt{f(x)}$ $g(x)$.

1. عين مجموعة تعريف الدالة g .
2. اكتب عبارة $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$.
3. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

مدرسة "الرّجاء والتفوّق" الخاصّة
Ecole Erradja wa Tafaouk
ÉCOLE PRIVÉE

من إعداد: الأستاذ بن مسعود

التمرين الأول:

1. لدينا:

$P(-2)=2(-2)^3-6(-2)^2-8(-2)+24=0$

$Q(2)=(2)^3-7(2)+6=0$

2.

- تحليل $P(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-6x^2-8x+24 & x+2 \\ \hline -2x^3+4x^2 & 2x^2-10x+12 \\ \hline -10x^2-8x+24 & \\ -10x^2-20x & \\ \hline 12x+24 & \\ -12x+24 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه: $P(x)=(x+2)(2x^2-10x+12)$،

أي: $P(x)=2(x+2)(x-2)(x-3)$.

- تحليل $Q(x)$:

$$\begin{array}{r|l} x^3-7x+6 & x-2 \\ \hline -x^3+2x^2 & x^2+2x-3 \\ \hline 2x^2-7x+6 & \\ -2x^2+4x & \\ \hline -3x+6 & \\ -3x+6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه: $Q(x)=(x-2)(x^2+2x-3)$،

أي: $Q(x)=(x-2)(x-1)(x+3)$.

- تحليل $P(x)+Q(x)$:

$P(x)+Q(x)=2(x+2)(x-2)(x-3)+(x-2)(x-1)(x+3)$

أي: $P(x)+Q(x)=(x-2)\left[2(x+2)(x-3)+(x-1)(x+3)\right]$،

نجد: $P(x)+Q(x)=(x-2)(3x^2-15)$.

3. لدينا: $P(x)+Q(x)=0$، أي: $(x-2)(3x^2-15)=0$،

إما: $x-2=0$ نجد $x=2$، أو: $3x^2-15=0$ نجد $x=\sqrt{5}$

أو $x=-\sqrt{5}$، في الأخير: $x\in\left\{-\sqrt{5};2;\sqrt{5}\right\}$.

4. لدينا: $3x\sqrt{x}-6x-15\sqrt{x}+30=0$

بوضع: $X=\sqrt{x}$ مع $X\geq 0$ تصبح المعادلة:

$3X^3-6X^2-15X+30=0$، أي: $P(X)+Q(X)=0$،

ومنه: $X\in\left\{2;\sqrt{5}\right\}$ ، ($X=-\sqrt{5}$ مرفوض لأن $X\geq 0$)

لما: $X=2$، أي: $\sqrt{x}=2$، نجد: $x=4$.

لما: $X=\sqrt{5}$، أي: $\sqrt{x}=\sqrt{5}$، نجد: $x=5$.

في الأخير: $x\in\{4;5\}$.

التمرين الثاني:

I.

1. الدالة g قابلة للاشتقاق على $[-2;4]$ ودالتها المشتقة هي:

$$g'(x)=\frac{(2\alpha x+\beta)(x^2-2x+2)-(2x-2)(\alpha x^2+\beta x)}{(x^2-2x+2)^2}$$

أي: $g'(x)=\dfrac{-4\alpha x^2+4\alpha x+\beta x^2+2\beta-2\beta x^2+2\alpha x^2}{(x^2-2x+2)^2}$

ومنه: $g'(x)=\dfrac{-2\alpha x^2-\beta x^2+4\alpha x+2\beta}{(x^2-2x+2)^2}$ ،

نجد: $g'(x)=\dfrac{(-2\alpha-\beta)x^2+4\alpha x+2\beta}{(x^2-2x+2)^2}$.

2. لدينا: منحنى الدالة g يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النّقطة $A(1;-1)$ معناه: $\begin{cases} g'(1)=0 \\ g(1)\quad 1 \end{cases}$

بمعنى: $\begin{cases} 2\alpha+\beta=0 \\ \alpha+\beta=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \quad +\beta=0 \\ -\alpha-\beta=1 \end{cases}$

بالجمع نجد: $\alpha=1$ نعوض نجد $\beta=-2$.

II. 1. الدالة f قابلة للاشتقاق على $[-2;4]$ ودالتها المشتقة هي:

$$f'(x)=\frac{(2x-2)(x^2-2x+2)-(2x-2)(x^2-2x)}{(x^2-2x+2)^2}$$ ،

أي: $f'(x)=\dfrac{(2x-2)(x^2-2x+2-x^2+2x)}{(\ ^2-2x+2)^2}$ ،

نجد: $f'(x)=\dfrac{4(\ -1)}{(x^2-2x+2)^2}$.

2. تكون $f'(x)$ 0 لما: $x=1$.

x	-2		1		4
$f'(x)$		-	0	+	

- استنتاج التغيرات:

f' سالبة على المجال $[-2;1]$ ومنه f متناقصة على هذا المجال.

f' موجبة على المجال $[1;4]$ ومنه f متزايدة على هذا المجال.

جدول تغيرات الدالة f :

x	-2		1		4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\frac{4}{5}$	↘	-1	↗	$\frac{4}{5}$

3. لدينا: لما $-1\leq x\leq 1$ ، تكون f متناقصة، ومنه:

$f(1)\leq f(x)\leq f(-1)$، أي: $-1\leq f(x)\leq\dfrac{3}{5}$.

4. من أجل كل $x\in D_f$، أي $-2\leq x\leq 4$ ، يكون $-4\leq -x\leq 2$ ،

معناه: $-2\leq 2-x\leq 4$ ومنه: $(2-x)\in D_f$.

$$f(2-x)=\frac{(2-x)^2-2(2-x)}{(2-x)^2-2(2-x)+2}=\frac{x^2-2x}{x^2-2x+2}=f(x)$$ ،

ومنه المستقيم ذو المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحنى (C_f).

مدرسة "الرّجاء والتّفوق" الخاصّة
Ecole Erradja wa Tafaouk
ÉCOLE PRIVÉE

5. تعيين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل:

لدينا: $f(x)=0$ ، أي: $\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+2}=0$ ، نجد: $x_1=0$ أو $x_2=2$.

ومنه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في $O(0;0)$ و $B(2;0)$.

- معادلة (Δ_1) المماس عند $O(0;0)$:

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، نجد: $y=-x$.

- معادلة (Δ_2) المماس عند $B(2;0)$:

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$ ، نجد: $y=x-2$.

6. دراسة وضعية (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=-x$:

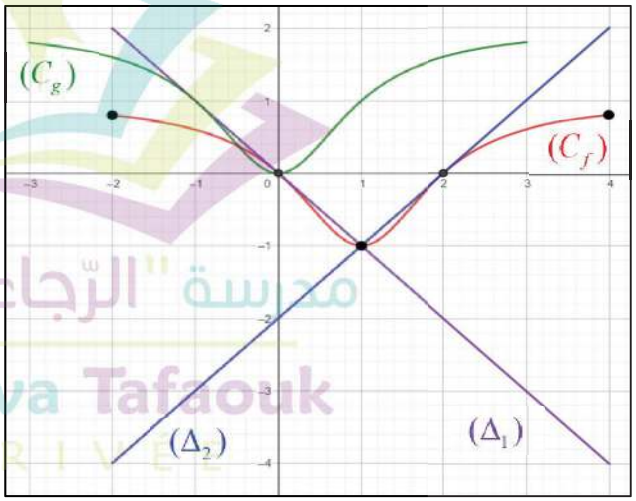
لدينا: $f(x)-y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+2}-(-x)=\dfrac{x^3-x^2}{x^2-2x+2}$،

ومنه: $f(x)-y=\dfrac{x^2(x-1)}{x^2-2x+2}$ ، إشارتها من إشارة $x^2(x-1)$.

x	-2		0		1		4
x^2		+		+		+	
$x-1$		-		-	0	+	
$f(x)-y$		-	0	-	0	+	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(Δ) يمس (C_f)	(C_f) تحت (Δ)	(Δ) يقطع (C_f)	(C_f) فوق (Δ)	

(Δ) يمس (C_f) عند $O(0;0)$، (C_f) يقطع (Δ) عند $A(1;-1)$.

7.



8. المناقشة البيانية:

- لما $\dfrac{m}{5}<-1$ أي $m<-5$ المعادلة لا تقبل حلول.
- لما $\dfrac{m}{5}=-1$ أي $m=-5$ المعادلة تقبل حلا وحيدا مضاعفا.
- لما $-1<\dfrac{m}{5}<0$ أي $-5<m<0$ المعادلة تقبل حلين موجبين.
- لما $\dfrac{m}{5}=0$ أي $m=0$ المعادلة تقبل حلين (موجب ومعدوم).
- لما $0<\dfrac{m}{5}\le\dfrac{4}{5}$ أي $0<m\le 4$ المعادلة تقبل حلين (موجب وسالب).
- لما $\dfrac{4}{5}<\dfrac{m}{5}$ أي $4<m$ المعادلة لا تقبل حلول.

III.

$$f(x+1)+1=\frac{(x+1)^2-2(x+1)}{(x+1)^2-2(x+1)+2}+1=\frac{2x^2}{x^2+1}=h(x)$$

(C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

التمرين الثالث:

I.

1. بقراءة بيانية نجد:

$f'(4)=0$ (مماس أفقي)، $f'(1)=\dfrac{0+3}{3-0}=1$ (ميل المماس عند A)

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(5+h)-f(5)}{h}=f'(5)=\dfrac{5-1}{4-6}=-2$ (ميل المماس عند C)

2. معادلة المماس عند A:

لدينا: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ، نجد: $y=x-3$.

3. $f(0,998)\approx(0,998)-3\approx 2,002$.

4. $f(x)=0$ لما: $x=-1$ ، $x=2$ أو $x=6$.

x	-2		-1		2		6
$f(x)$		+	0	-	0	+	0

5. $f'(x)$ سالبة على المجالين $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right[$ و $]4;6]$.

$f'(x)$ موجبة على المجال $\left]\dfrac{1}{2};4\right[$.

$f'(x)$ تنعدم عند: $x=4$ و $x=\dfrac{1}{2}$.

x	-2		$\frac{1}{2}$		4		6
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	4	↘	$\frac{-9}{4}$	↗	4	↘	0

6. $\dfrac{-9}{4}$ هي قيمة حدية محلية للدالة f في المجال $[0;1]$.

4 هي قيمة حدية محلية للدالة f في المجال $[3;5]$.

II.

1. لدينا: $f(x)\ge 0$ و $D_g=\{x/x\in D_f\}$،

نجد: $D_g=[-2;-1]\cup[2;6]$.

2. g قابلة للاشتقاق على D_g: $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

3. إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$ ومنه:

$g'(x)$ سالبة على المجالين $[-2;-1]$ و $[4;6]$ ومنه g متناقصة عليهما.

$g'(x)$ موجبة على المجال $[2;4]$ ومنه g متزايدة على هذا المجال.

x	-2		-1	2		4		6
$g'(x)$		-	‖	0	+	0	-	
$g(x)$	2	↘	‖	0	↗	2	↘	0

مدرسة "الرجاء والتفوق" الخاصّة
Ecole Erradja wa Tafaouk
ÉCOLE PRIVÉE