



ماي 2022

المستوى: الثانية ثانوي رياضيات

/ المدة: ساعتين

اختبار الفصل الثالث في مادة الرياضيات

التمرين 1 (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \end{cases}$$

 (v_n) و (w_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n \text{ و } v_n = u_{n+1} - u_n$$

اجب بصحيح او خطأ مع التبرير :

(1) المتتالية (v_n) هندسية .(2) المتتالية (w_n) ثابتة.(3) من اجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$ (4) المتتالية (u_n) متباعدة.التمرين 2لتكن الدالة f المعرفة على $]-2; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(الشكل في الوثيقة المرفقة)

(I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- (1) مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء) .
 (2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

- (1) برهن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
 (2) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(3) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ماذا تستنتج ؟

(4) احسب المجموع S_n بدلالة n : $S_n = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + \dots + \frac{1}{u_n - 1}$

التمرين 3

(I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 2 \end{cases}$$

حيث من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 3$.

- (1) احسب u_1 ، u_2 و u_3 ماذا تخمن بالنسبة لإتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(2) تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{3} (u_n - 3)$

- (3) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

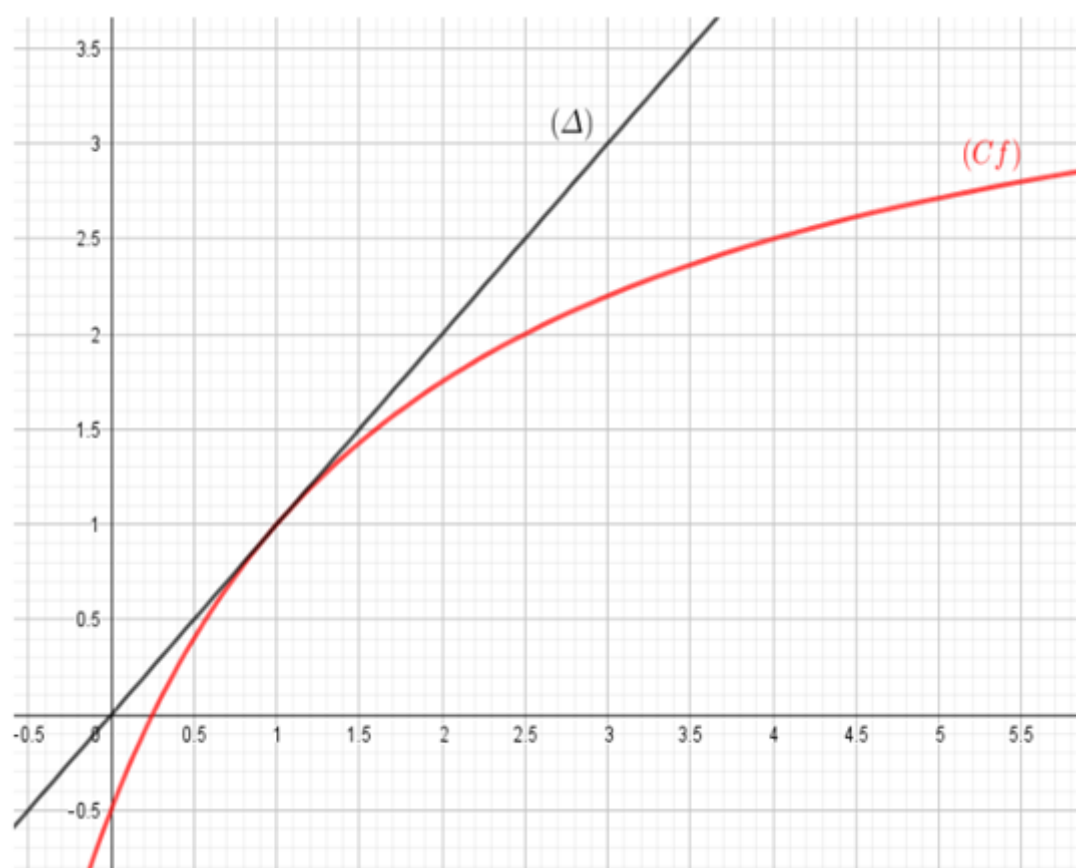
- (1) عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

(2) نضع $\alpha = -3$

- (ا) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(ب) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. ماذا تستنتج ؟

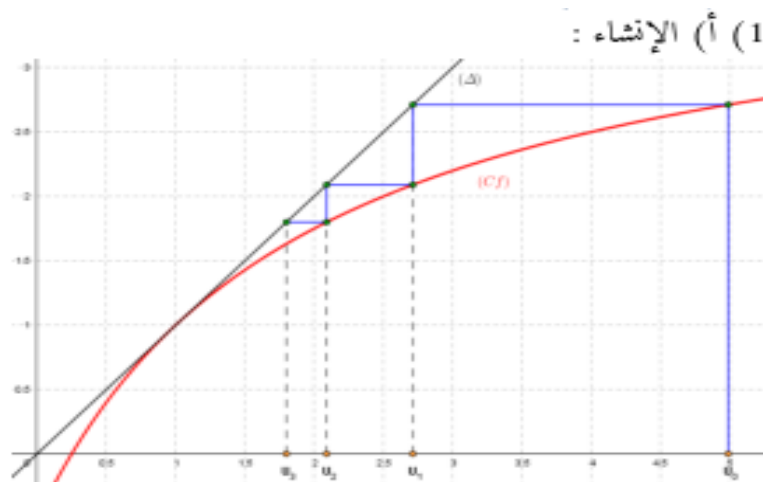
(ج) احسب الجداء : $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$



الوثيقة المرفقة.

التصحيح النموذجي

التمرين رقم	الحل	التنقيط
التمرين الأول	(1) المتتالية (V_n) هندسية. صحيح التبرير: $V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} = \frac{1}{3}U_{n+1} + \frac{2}{3}U_n - U_{n+1} = -\frac{2}{3}U_{n+1} + \frac{2}{3}U_n = -\frac{2}{3}(U_{n+1} - U_n) = -\frac{2}{3}V_n$ ومنه المتتالية (V_n) هندسية أساسها $q = -\frac{2}{3}$. (2) المتتالية (W_n) ثابتة. صحيح التبرير: $W_{n+1} = U_{n+2} + \frac{2}{3}U_{n+1} = \frac{1}{3}U_{n+1} + \frac{2}{3}U_n + \frac{2}{3}U_{n+1} = U_{n+1} + \frac{2}{3}U_n = W_n$ (3) من أجل كل عدد طبيعي n، فإن: $U_n = \frac{3}{5}(W_n - V_n)$. صحيح التبرير: لدينا: $U_n = \frac{3}{5}(W_n - V_n)$ ومنه $W_n - V_n = U_{n+1} + \frac{2}{3}U_n - (U_{n+1} - U_n) = \frac{5}{3}U_n$. (4) المتتالية (U_n) متباعدة. خطأ التبرير: المتتالية (V_n) هندسية معناه $V_n = \underbrace{V_0}_{U_1 - U_0 = 1} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ و (W_n) متتالية ثابتة: $W_n = W_0 = U_1 + \frac{2}{3}U_0 = 1$ ومنه: $U_n = \frac{3}{5}(W_n - V_n) = \frac{3}{5}\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$ وعليه $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{5}\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{5}$ ومنه المتتالية (U_n) متقاربة.	



ب) التخمين : نلاحظ أنَّ المتتالية (u_n) متناقصة و تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ) .

(1) (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = 1/3$

و حدها الاول $1/4$

ب) (*) عبارة v_n بدلالة n : $v_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{4}$

(*) عبارة u_n بدلالة n : $u_n = \frac{1}{v_n - 1}$ ، أي :

$$u_n = \frac{1}{v_n} + 1 \text{ ، أي : } u_n = \frac{1}{\frac{1}{3}n + \frac{1}{4}} + 1$$

$$\text{و منه : } u_n = \frac{1}{\frac{1}{3}n + \frac{1}{4}} + 1$$

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\frac{1}{3}n + \frac{1}{4}} + 1 \right] = 1$$

(4) حساب المجموع S_1 بدلالة n : $S_1 = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + \dots + \frac{1}{u_n - 1}$

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{6} + \frac{n+1}{4}$$

التمرين
الثاني

1. حساب u_1, u_2, u_3 .

$$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 = \frac{1}{3} \times \frac{10}{3} + 2 = \frac{28}{9}, u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 2 = \frac{1}{3} \times 4 + 2 = \frac{10}{3}, u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 6 + 2 = 4$$

التخمين بالنسبة لاتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ يبدو أن المتتالية (u_n) متناقصة.

$$(2) \text{ التحقق انه من اجل كل عدد طبيعي } n: u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{3} (u_n - 3)$$

(3) اتجاه تغير المتتالية (u_n) : متناقصة

(1) عين قيمة α بحيث تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \alpha = \frac{1}{3}u_n + 2 + \alpha \\ &= \frac{1}{3}(v_n - \alpha) + 2 + \alpha \\ &= \frac{1}{3}v_n + 2 + \frac{2}{3}\alpha \end{aligned}$$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ إذا فقط إذا كان $2 + \frac{2}{3}\alpha = 0$ أي $\alpha = -3$.

فيكون حدها الأول $v_0 = u_0 - 3 = 6 - 3 = 3$.

ب - كتابة v_n بدلالة n ,

$$v_n = v_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

استنتاج كتابة u_n بدلالة n .

$$u_n = v_n + 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3$$

أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3 \right) = 3 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0 \text{ لدينا}$$

التمرين
3

و منه المتتالية متقاربة .

ج) حساب الجداء: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

$$P_n = 3^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$