



مارس 2022

المستوى الثانية رياضيات

المدة: ساعتان

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ النقط $A(1; 2)$; $B(-8; -1)$; $C(3; 4)$ و H نقطة معرفة كما يلي: $\vec{AH} = \frac{3}{2}\vec{AC}$.

(1) بين أن النقطة H هي مرجح النقطتين A و C المرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما.

(2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1); (B; -1); (C; -3)\}$.

أ- أنشئ G .

ب- احسب إحداثيتي النقطة G .

ج بين أن النقط H ; B و G على استقامة واحدة.

(3) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = 3(k+1)^2, k \in \mathbb{R}$

أ- عبر عن الشعاع $\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MC}$ بدلالة $\vec{MG}$

ب- عين قيم k حتى تكون (E) دائرة نصف قطرها 1 يطلب تعيين مركزها، ثم أنشئها.

(4) عين و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي في الحالة التالية $2\|\vec{MA} - \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = 3\|\vec{MA} - 3\vec{MC}\|$

التمرين الثاني

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) أحسب $g(-2)$ ثم حل المعادلة $g(x) = 0$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x+1)^2}$$

(1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$$f'(x) = \frac{2g(x)}{(x+1)^3}$$

(2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$ حيث $a; b; c$ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

(3) بين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل (Δ) , يطلب تعيين معادلتيهما.

(4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(5) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $\alpha \in]-0,35; -0,34[$.

(6) ارسم المنحنى (C_f) .

(7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$m - 3 + \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

(III) تعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ ب :

$$h(x) = \frac{2|x|^3 + 7x^2 + 8|x| + 2}{(|x| + 1)^2}$$

(1) بين أن الدالة h زوجية.

(2) وضح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أنشئه.

التصحيح النموذجي:

التمرين الأول (6 ن):

(1) H مرجح الجملة المثقلة $\{(A; -1); (C; 3)\}$

(2) أ) الإنشاء: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

ب) الاحداثيات : $G(0; 3)$

(3) G مرجح الجملة المثقلة $\{(H; -2); (B; -1)\}$ ومنه النقط $G; H; B$ على استقامية.

ب) قيم k : $k = -2$ او $k = 0$

(4) $MG = MH$: مجموعة النقط M هي محور القطعة $[GH]$

التمرين الثاني (14 ن):

(1) دراسة التغيرات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$g'(x) = 3(x + 1)^2$$

لدينا: $g'(x) > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

② حساب $g(-2)$:

$$g(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$$

- حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا (-2) جذر لـ $g(x)$ ومنه:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - (-2))(x^2 + ax + b) \\ &= (x + 2)(x^2 + ax + b) \\ &= x^3 + ax^2 + bx + 2x^2 + 2ax + 2b \\ &= x^3 + (a + 2)x^2 + (b + 2a)x + 2b \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a + 2 = 3 \\ b + 2a = 3 \\ 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

إذن:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Rightarrow (x + 2)(x^2 + x + 1) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ \text{أو} \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لحل المعادلة $(x^2 + x + 1 = 0)$ نستخدم المميز Δ :



ومنه $(x^2 + x + 1) > 0$ في $\mathbb{R}$

③ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x + 1)^2}$$

① تبين أن: $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x+1)^3}$

② دراسة تغيرات الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها:

- تعيين النهايات:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x + 1)^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3}{x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x) = -\infty \\ \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

ومنه إشارة $f'(x)$ كالآتي:

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$2g(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+1)^3$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$

③ تبين أن: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$

$$f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

ا/ تبين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$

ولدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (2x + 3)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2} - (2x + 3) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{-1}{(x+1)^2} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته $y_{(\Delta)} = 2x + 3$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

لدينا $(x+1)^2 > 0$ ومنه $(f(x) - y_{(\Delta)}) < 0$

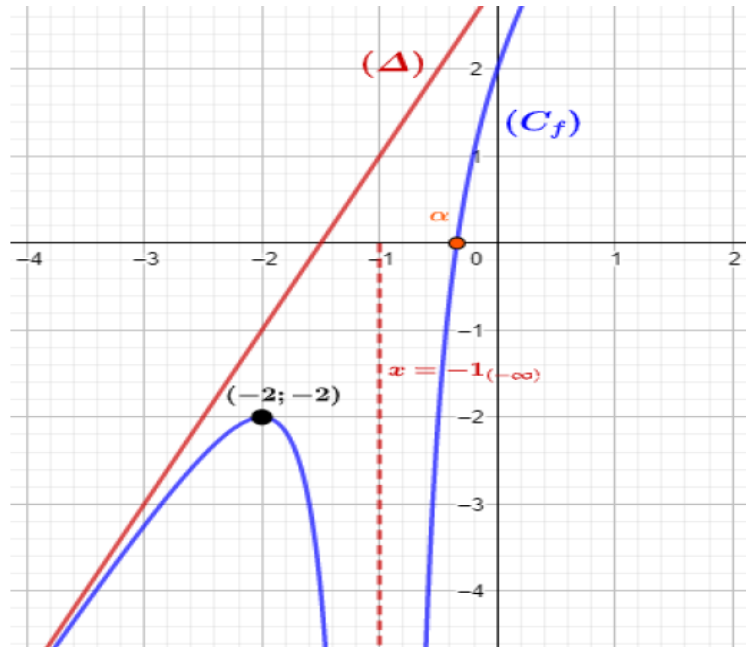
إذن (C_f) تحت (Δ) لما $x \in D_f$.

⑤ تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حيث: $\alpha \in]-0.35; -0.34[$

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $]-1; +\infty[$

ولدينا: $f(-0.35) \approx -0.07$ و $f(-0.34) \approx 0.02$ لأن: $f(-0.35) \times f(-0.34) < 0$

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حيث: $-0.35 < \alpha < -0.34$



7 المناقشة البيانية

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيمات المائلة ذات المعادلة $y_m = 2x + m$ ، وهي:

لما $m \in]-\infty; 2[$: يوجد حلان سالبان

لما $m \in]2; 3[$: يوجد حلان احدهما سالب تماما والآخر موجب تماما

لما $m = 2$: يوجد حل مضاعف سالب وحل معدوم

لما $m \in [3; +\infty[$: لا يوجد حلول

1 تبين أن الدالة h زوجية:

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

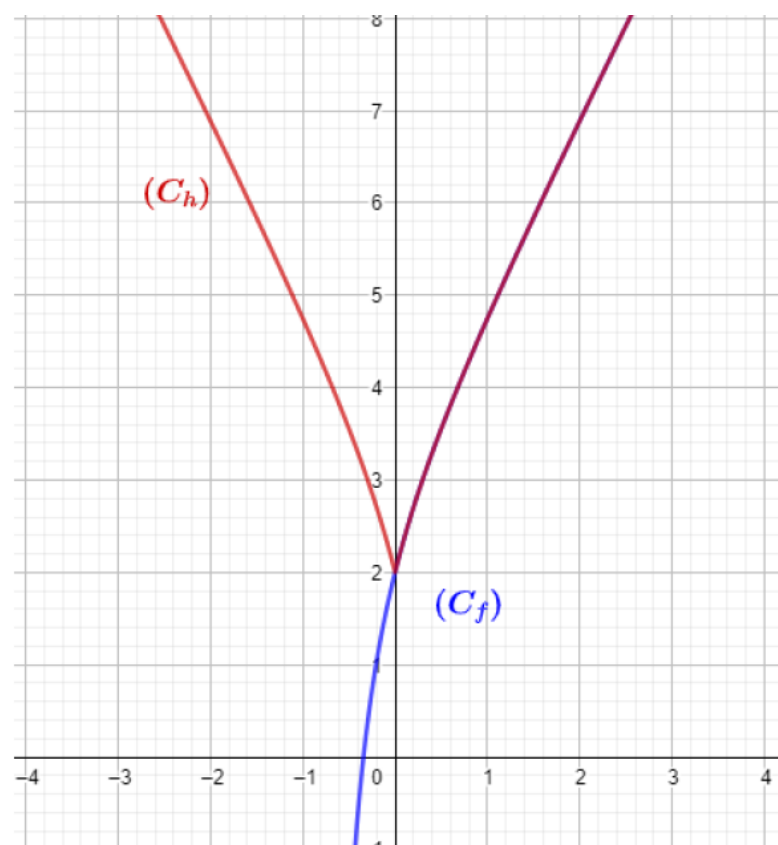
$h(-x) = h(x)$ ومنه الدالة h زوجية.

2 رسم المنحنى (C_h) :

لما $x \geq 0$ لدينا: $h(x) = f(x)$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $x \in \mathbb{R}_+$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة إلى محور الترتيب.



التصحيح النموذجي:

التمرين الأول (6 ن):

(1) قيم α : $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$

(2) أ) الإنشاء: $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} \overrightarrow{AC}$

ب) $MG = 4$: مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G و نصف قطرها 4

ج) $MG = MI$: مجموعة النقط M هي محور القطعة $[GI]$

(3) أ) $x_G = \frac{2\alpha}{\alpha+1}$ و $y_G = \frac{-10\alpha}{\alpha+1}$

ب) مجموعة النقط α عندما يسمح $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$ هي مستقيم معادلته $y = -5x$

التمرين الثاني (14 ن):