

اختبار الفصل الثالث

التبرير الأول

كل أجب بصح أو خطأ مع التبرير :

1. إذا كان $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AD}$ فإن نسبة التحاكي h الذي مركزه I ويحول A إلى D هي $k = 2$.
2. إذا كان $3\vec{BC} = \vec{AC}$ فإن صورة B بالتحاكي h الذي مركزه C ونسبته 3 هي A .
3. h تحاكي يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ النقطة $M'(x'; y')$ حيث: $\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 6 \end{cases}$ ، إحداثيات النقطة الصامدة هي $\Omega(-1; 3)$.

التبرير الثاني

في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعتبر النقطتين $A(2; 2)$ ، $B(3; 0)$ و المستقيم $(T): y = x - 2$

1. أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) محور القطعة $[OA]$.
2. أكتب معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي قطرها $[OA]$.
3. بين أن المستقيم (T) مماس للدائرة (C) ثم حدد إحداثيتي نقطة التماس E .
4. بين أن النقطة B تقع خارج الدائرة (C) .
5. بين أن $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 6$ ثم استنتج قياسا للزاوية $\hat{AOB}$.
6. أحسب مساحة المثلث AOB .
7. عين مجموعة النقط M التي تحقق: $MO^2 + MA^2 = 8$.

التبرير الثالث

1. (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{7u_n}{1 + 2u_n}$

أ- أحسب u_1 و u_2 .

ب- بين أن: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(3 - u_n)}{1 + 2u_n}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) إذا علمت أن $0 < u_n < 3$.

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n}{3 - u_n}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 7$.

ب- أكتب v_n بدلالة n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$ ، ماذا تستنتج؟

3. أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n+1}$

(1) خطأ: النسبة هي $k = -2$

التبرير: $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AD} = \frac{1}{3}(\vec{AI} + \vec{ID}) = \frac{1}{3}\vec{AI} + \frac{1}{3}\vec{ID}$

أي $\frac{2}{3}\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{ID}$ أي $\vec{ID} = -2\vec{IA}$ ومنه $\vec{ID} = -2\vec{IA}$

(2) صح: صورة B بالتحاكي h الذي مركزه C ونسبته 3 هي النقطة A

التبرير: $\vec{AC} = 3\vec{CB}$ أي $3\vec{BC} = \vec{AC}$

(3) خطأ: النقطة الصامدة هي $\Omega(1; 2)$

التبرير: $\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 6 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x = -2x + 3 \\ y = -2y + 6 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

(1) معادلة المستقيم (Δ)

$\vec{OA}$ شعاع ناظمي إذن: $(\Delta): 2x + 2y + c = 0$

المستقيم يشمل منتصف $[OA]$ أي $\omega(1, 1)$ إذن نبحث عن قيمة c بما أن $\omega \in (\Delta)$ أي: $2(1) + 2(1) + c = 0 \Rightarrow c = -4$

ومنه $(\Delta): 2x + 2y - 4 = 0$ أو $(\Delta): x + y - 2 = 0$

(2) معادلة الدائرة (C)

لدينا المركز $\omega(1, 1)$ ونصف القطر $\frac{OA}{2} = r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

إذن معادلة الدائرة هي: $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

(3) تبين أن (T) مماس لـ (C)

نحسب المسافة بين مركز الدائرة والمستقيم (T)

$d(\omega, (T)) = \frac{|-x_0 + y_0 + 2|}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}} = \frac{|-(1) + 1 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

إذن $d(\omega, (T)) = \sqrt{2} = r$ ومنه (T) مماس لـ (C)

كل واحد واحد (نقطة E): أي إيجاد النقطة التقاطع أو التماس

بين (T) و (C) نحل جملة المعادلة: $\begin{cases} y = x - 2 \dots (1) \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \dots (2) \end{cases}$

بتعويض (1) في (2) نجد: $(x-1)^2 + ((x-2)-1)^2 = 2$ بعد

التبسيط نجد: $2x^2 - 8x + 8 = 0$ نبسط المعادلة نجد $(x-2)^2 = 0$

أو نحل المعادلة بحساب المميز $\Delta = 0$ إذن المعادلة تقبل حل

مضاعف $x = 2$ بالتعويض في المعادلة رقم (1) نجد $y = 0$ إذن

إحداثيات النقطة $E(2, 0)$

(4) تبين أن النقطة B تقع خارج الدائرة (C)

نحسب المسافة $\omega B = \sqrt{5} > r = \sqrt{2}$ إذن B تقع خارج الدائرة (C) .

(5) تبين أن: $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 6$

لدينا $\vec{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\vec{OB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ إذن $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 3 \times 2 + 2 \times 0 = 6$

كل (سنستخرج قيم الزاوية $\hat{AOB}$):

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\| \cdot \cos(\vec{OA}, \vec{OB}) = 6$

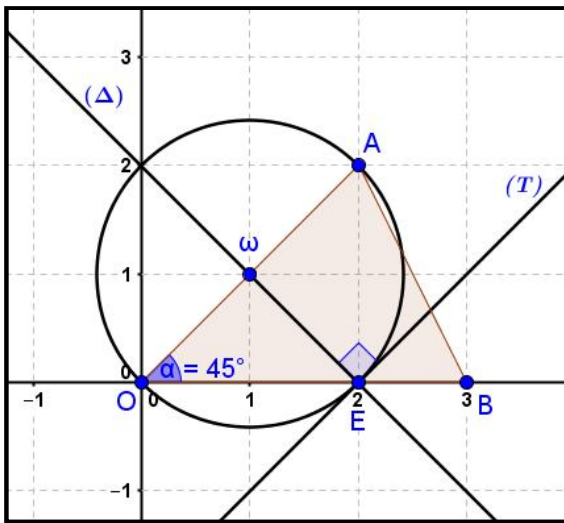
إذن: $\cos(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ومنه: $(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{4}$

(6) حساب مساحة المثلث AOB :

لدينا: $\sin \hat{O} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$S_{AOB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$ أي $S_{AOB} = \frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin \hat{O}$

ومنه $S_{AOB} = 3$



(7) تبين مجموعة النقطة M التي تحقق: $MO^2 + MA^2 = 8$

لدينا $\omega(1, 1)$ منتصف $[OA]$ إذن حسب مبرهنة المتوسط:

$2M\omega^2 + \frac{1}{2}OA^2 = 8$ أي $MO^2 + MA^2 = 2M\omega^2 + \frac{1}{2}OA^2$

أي $M\omega = \sqrt{2}$ إذن $M\omega^2 = 2$ ومنه $2M\omega^2 + \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2 = 8$

وبالتالي فإن مجموعة النقطة هي الدائرة التي مركزها النقطة ω و نصف قطرها $\sqrt{2}$ أي هي الدائرة (C) .

ج- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n+1}$

$$\text{عدد الحدود} = n + 2 = [(n+1) - 0 + 1]$$

$$S_n = v_0 \times \left(\frac{q^{n+2} - 1}{q - 1} \right) = 2 \left(\frac{7^{n+2} - 1}{7 - 1} \right) = \frac{7^{n+2} - 1}{3}$$



١/١ - حساب u_1 و u_2 .

$$u_1 = \frac{7u_0}{1 + 2u_0} = \frac{7 \times 2}{1 + 2 \times (2)} = \frac{14}{5}$$

$$u_2 = \frac{7u_1}{1 + 2u_1} = \frac{7 \left(\frac{14}{5} \right)}{1 + 2 \left(\frac{14}{5} \right)} = \frac{98}{33}$$

ب- تبين أن: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(3 - u_n)}{1 + 2u_n}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{7u_n}{1 + 2u_n} - u_n = \frac{7u_n - (u_n)(1 + 2u_n)}{1 + 2u_n} \\ &= \frac{7u_n - u_n - 2u_n^2}{1 + 2u_n} = \frac{6u_n - 2u_n^2}{1 + 2u_n} = \frac{2u_n(3 - u_n)}{1 + 2u_n} \end{aligned}$$

نستنتج (نجاه تغير المتتالية (u_n))

لدينا $0 < u_n < 3$: لأن $2u_n > 0$ و $1 + 2u_n > 0$ لأن $u_n > 0$

و $(3 - u_n) > 0$ لأن $u_n < 3$ إذن $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

٢/١ - تبين أن المتتالية (v_n) هندسية

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{3 - u_{n+1}} = \frac{\frac{7u_n}{1 + 2u_n}}{3 - \frac{7u_n}{1 + 2u_n}} = \frac{\frac{7u_n}{1 + 2u_n}}{\frac{3(1 + 2u_n) - 7u_n}{1 + 2u_n}} \\ &= \frac{\frac{7u_n}{1 + 2u_n}}{\frac{3 - u_n}{1 + 2u_n}} = 7 \times \frac{u_n}{3 - u_n} = \frac{7u_n}{3 - u_n} \end{aligned}$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 7$ وحدها الأول

$$v_0 = \frac{u_0}{3 - u_0} = \frac{2}{3 - 2} = 2$$

ب- كتابت (v_n) بدلالة n

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه: } v_n = 2 \times 7^n$$

ج- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = +\infty \text{ لأن } q = 7 > 1 \text{ و } v_0 = 2 > 0$$

نستنتج أن المتتالية (v_n) متباعدة.