

2016/02/29

﴿ إخبار الثالثي الثاني في مادة الرياضيات ﴾

المدة: ساعتان

الأقسام: 2 علوم تجريبية

التمرين الأول: (8 نقاط)

$$(I) \quad \begin{cases} u_1 - u_4 = -6 \\ u_1 + u_5 = 28 \end{cases} \quad \text{متتالية حسابية حدها الأول } u_0 \text{ و أساسها } r \text{ بحيث :}$$

(1) عين أساس هذه المتتالية و حدها الأول .

(2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$(II) \quad \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - 1 \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة بـ :}$$

(1) احسب : v_2, v_1 .(2) نعتبر المتتالية $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ : $w_n = v_n + 2$.أ - برهن أن (w_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .ب - أكتب عبارة w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة v_n بدلالة n .ت - أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$ ث - استنتج عبارة S'_n بدلالة n حيث : $S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

التمرين الثاني: (12 نقطة)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} \quad \text{دالة عددية لمتغير حقيقي } x \text{ معرفة على } \mathbb{R} - \{-1; 3\} \text{ بالشكل :}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.(1) بين أنه مهما يكن $x \in \mathbb{R} - \{-1; 3\}$: $f(x) = 1 + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3}$ حيث b, c عدنان حقيقيان ثابتان

يطلب تعيينهما.

(2) أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.(3) بين أن المنحني $(\mathcal{C})$ يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة يطلب تعيين معادلاتها.(4) عين نقط تقاطع المنحني $(\mathcal{C})$ مع محوري الإحداثيات.(5) بين أنه مهما يكن $x \in D_f$ و $2-x \in D_f$ فإن : $f(2-x) = f(x)$ (6) أكتب معادلة المماس (D) للمنحني $(\mathcal{C})$ في النقطة التي فاصلتها 2.(7) أنشئ $(\mathcal{C})$ و (D).(8) عين بيانيا عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = 6$.

التمرين الأول:

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية حسابية ر حيث،

$$\begin{cases} u_1 - u_4 = -6 \\ u_1 + u_5 = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 + r - (u_0 + 4r) = -6 \\ u_0 + r + u_0 + 5r = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3r = -6 \\ 2u_0 + 6r = 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = 2 \\ u_0 = 8 \end{cases}$$

كتابة عبارة الكمال العام.

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = 8 + 2n \quad (1)$$

(3) حساب المجموع

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= \frac{n+1}{2} (u_0 + u_n) \\ &= \frac{n+1}{2} (8 + 8 + 2n) \end{aligned}$$

$$S_n = (n+1)(8+n) \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - 1 \end{cases}$$

$$v_1 = \frac{1}{2}v_0 - 1 = 2 \quad (0.5)$$

$$v_2 = \frac{1}{2}v_1 - 1 = 0 \quad (0.5)$$

(2) نكتب المتتالية (w_n) المعرفة بـ

$$w_n = v_n + 2$$

(أ) برهان أن (w_n) هي متتالية هندسية

$$w_{n+1} = v_{n+1} + 2$$

$$= \frac{1}{2}v_n - 1 + 2$$

$$= \frac{1}{2}v_n + 1 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}(v_n + 2) = \frac{1}{2}w_n$$

ومن ذلك (w_n) هي متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{2}$ ونصلها الأول

$$(0.5) \quad w_0 = v_0 + 2 = 8.$$

ب/ عبارة الكمال العام w_n .

$$\begin{aligned} w_n &= w_0 \cdot q^n \\ &= 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (0.5) \end{aligned}$$

استنتاج عبارة v_n

$$v_n = w_n - 2$$

$$v_n = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \quad (0.5)$$

(3) حساب المجموع S_n .

$$\begin{aligned} S_n &= w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n \\ &= w_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$S_n = 16 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \quad (1)$$

ث: استنتاج عبارة S_n

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= (w_0 - 2) + (w_1 - 2) + \dots + (w_n - 2) \\ &= w_0 + w_1 + \dots + w_n - 2(n+1) \\ &= 16 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 2(n+1) \quad (1) \end{aligned}$$

التمرين الثاني

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$$

أ/ برهان أنه متساوية

$$f(x) = 1 + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-3}$$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ ومنه (C) يُقبل مستقيم
 (0.5) $x = -1$ مغارِب عودي مُعادلة $x \rightarrow -1$
 لدينا: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \pm \infty$ ومنه (E) يُقبل مستقيم
 (0.5) $x = 3$ مغارِب عودي مُعادلة $x \rightarrow 3$
 (4) المقاطع مع المحاور.

(I) مع محور التواصل: معاً $f(x) = 0$
 $x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Delta = 64$, $x_1 = -3$, $x_2 = 5$ ومنه

(C) $\cap (xx) = \{A(-3, 0), B(5, 0)\}$ (0.5)

(B) مع محور الترتيب $f(0) = 5$ ومنه $(xx) \cap (yy) = \{C(0, 5)\}$ (0.5)

(5) برهان أن $x \in D_f$ $2 - x \in D_f$

$f(2-x) = f(x)$

لدينا: $f(x) = 1 + \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-3}$

$f(2-x) = 1 + \frac{3}{2-x+1} - \frac{3}{2-x-3}$

$= 1 + \frac{3}{-x+3} - \frac{3}{-x-1}$

$= 1 - \frac{3}{x-3} + \frac{3}{x+1} = f(x)$ (1)

(*) ينبغي يثبت أن منحنى الدالة f

يُقبل محور تناظر هو المستقيم ذو المعادلة $x = 1$

(6) كتابة معادلة المماس في النقطة $(1, 5)$

فاصلتها 2: $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

$y = \frac{8}{3}(x-2) + 5$ (1)

$y = \frac{8}{3}x - \frac{1}{3}$ (7) للمحطة

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-3) + b(x-3) + c(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2 + x - 3x - 3 + bx - 3b + cx + c}{(x^2 - 2x - 3)}$$

$$= \frac{x^2 + (b+c-2)x + c - 3b - 3}{(x^2 - 2x - 3)}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} b+c-2 = -2 \\ c-3b-3 = -15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c = 0 \\ c-3b = -12 \end{cases}$$

نجد $b = 3$ و $c = -3$ (1)

منه $f(x) = 1 + \frac{3}{x+1} - \frac{3}{x-3}$

ندرس تغيرات الدالة f .

$D_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 3[\cup]3, +\infty[$

النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ (0.25) (1.5)

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$ (0.25)

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 2x - 3} = +\infty$ (0.25)

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ (0.25)

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$ (0.25)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (0.25)

المشتق: $f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2-2x-3) - (2x-2)(x^2-2x-15)}{(x^2-2x-3)^2}$

$= \frac{(2x-2)(12)}{(x^2-2x-3)^2} = \frac{24x-24}{(x^2-2x-3)^2}$ (1)

إشارة $f'(x)$ من إشارة $24x-24$ أي $x-1$

جدول التغيرات:

x | $-\infty$ | -1 | 1 | 3 | $+\infty$

$f(x)$ | 1 | $-\infty$ | 4 | $+\infty$ | 1

$f(x)$ | 1 | $-\infty$ | 4 | $+\infty$ | 1

(3) المستقيمات المقاربة:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$ ومنه (C) يُقبل مستقيم مغارِب

(0.5) $y = 1$ مغارِب عودي مُعادلة $y = 1$ مغارِب عودي مُعادلة $y = 1$

(8) العنصر الثاني لعددنا إشارة حلول المعادلة $f(x) = 6$
حلول هذه المعادلة هي فواصل تقاطع المماس مع المستقيم $y = 6$.
إذن: المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة. $\textcircled{05}$