الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية غليزان — ثانوية: محمد بوضياف – مديونة
المستوى: السنة الثانية ثانوي — يوم: الثلاثاء 18 نوفمبر 2025
الشعبة: رياضيات .

الفرض المحروس الثاني للفصل الأول في مادة: الرياضيات — المدة: 80 دقيقة

التمرين الأول: ()

الجزء الأول: x متغير حقيقي، نعتبر كثيري الحدود P و Q_α المعرفين كمايلي:

$$P(x)=x^3+3x^2+4x+1 \quad \text{و} \quad Q_\alpha(x)=x^2+(3+\alpha)x-\frac{1}{\alpha}،$$

حيث α عدد حقيقي وحيد من المجال $]-0.4,-0.3[$ و يحقق $P(\alpha)=0$.

1) ليكن Δ_α مميز ثلاثي الحدود $Q_\alpha(x)$.

ا) بين أن: $\Delta_\alpha=3\alpha+5+\frac{3}{\alpha}$.

ب) عين إشارة العدد Δ_α، ثم استنتج إشارة $Q_\alpha(x)$ حسب قيم x.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $P(x)=(x-\alpha)Q_\alpha(x)$.

3) أدرس إشارة $P(x)$ حسب قيم x.

الجزء الثاني: لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ : $f(x)=\frac{2x^3-4x^2+1}{2(x-1)^2}$،

و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن: $f'(x)=-\frac{P(-x)}{(x-1)^3}$.

2) أدرس إتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) استنتج أن الدالة f تقبل قيمة حدية محلية يطلب تعيينها.

4) ليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$.

ا) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1: $f(x)=x+\frac{-2x+1}{2(x-1)^2}$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المستقيم (Δ).

5) بين أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

6) ا) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن: $f''(x)=\frac{-2x-1}{(x-1)^4}$.

ب) بين أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

7) بالاعتماد على التقريب التآلفي، عين قيمة مقربة للعدد $f\left(-\frac{2025}{2026}\right)$.

انتهى الموضوع — بالتوفيق للجميع

حل التمرين 2:

I) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$

$Q_\alpha(x) = x^2 + (3+\alpha)x - \frac{1}{\alpha}$

1) التبيان أن $\Delta_\alpha = 3\alpha + 5 + \frac{3}{\alpha}$:

لدينا: $\Delta_\alpha = (3+\alpha)^2 - 4\times 1\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^2 + 6\alpha + 9 + \frac{4}{\alpha}$

$= \frac{\alpha^3 + 6\alpha^2 + 9\alpha + 4}{\alpha}$ .... (1)

بما أن: $P(\alpha) = 0$ فإن:

$\alpha^3 + 3\alpha^2 + 4\alpha + 1 = 0$

إذن: $\alpha^3 = -3\alpha^2 - 4\alpha - 1$ ... (2)

من (1) و (2) نجد: $\Delta_\alpha = \frac{-3\alpha^2 - 4\alpha - 1 + 6\alpha^2 + 9\alpha + 4}{\alpha}$

$= \frac{3\alpha^2 + 5\alpha + 3}{\alpha} = 3\alpha + 5 + \frac{3}{\alpha}$.

ب) تعيين إشارة Δ_α :

لدينا: $-0{,}4 < \alpha < -0{,}3$ إذن: $\begin{cases} 3{,}8 < 3\alpha + 5 < 4{,}1 \\ -\frac{3}{0{,}3} < \frac{3}{\alpha} < -\frac{3}{0{,}4} \end{cases}$

ومنه: $-6{,}2 < 3\alpha + 5 + \frac{3}{\alpha} < -3{,}4$

إذن: $\Delta_\alpha < 0$ أي إشارة Δ_α سالبة تماما.

* استنتاج إشارة $Q_\alpha(x)$ حسب قيم x :

بما أن $\Delta_\alpha < 0$ فإنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$Q_\alpha(x) > 0$.

2) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن:

$P(x) = (x-\alpha)\,Q_\alpha(x)$

لدينا: $(x-\alpha)\,Q_\alpha(x) = (x-\alpha)\left(x^2 + (3+\alpha)x - \frac{1}{\alpha}\right)$

$= x^3 + (3+\alpha)x^2 - \frac{1}{\alpha}x - \alpha x^2$

$-\alpha(3+\alpha)x + 1$

$= x^3 + 3x^2 - \frac{\alpha^3 + 3\alpha^2 + 1}{\alpha}x + 1$

بما أن $P(\alpha) = 0$ فإن: $\alpha^3 + 3\alpha^2 + 1 = -4\alpha$

إذن: $(x-\alpha)\,Q_\alpha(x) = x^3 + 3x^2 + \frac{4\alpha}{\alpha}x + 1$

$= x^3 + 3x^2 + 4x + 1$

$= P(x)$

و بالتالي $P(x) = (x-\alpha)\,Q_\alpha(x)$.

3) إشارة $P(x)$ حسب قيم x :

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $Q_\alpha(x) > 0$

إذن إشارة $(x-\alpha)\,Q_\alpha(x)$ من نفس إشارة $(x-\alpha)$

ومنه:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

II) $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2 + 1}{2(x-1)^2}$; $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

1) تبيان أن $f'(x) = -\frac{P(-x)}{(x-1)^3}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$ ، ولدينا من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$:

$f'(x) = \frac{2(6x^2 - 8x)(x-1)^2 - 4(x-1)(2x^3 - 4x^2 + 1)}{4(x-1)^4}$

$= \frac{(3x^2 - 4x)(x-1) - (2x^3 - 4x^2 + 1)}{(x-1)^3}$

$= \frac{3x^3 - 7x^2 + 4x - 2x^3 + 4x^2 - 1}{(x-1)^3}$

$= \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{(x-1)^3}$

$= -\frac{-x^3 + 3x^2 - 4x + 1}{(x-1)^3}$

$= -\frac{(-x)^3 + 3(-x)^2 + 4(-x) + 1}{(x-1)^3}$

$= -\frac{P(-x)}{(x-1)^3}$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا من أجل كل x من D_f : إشارة $(x-1)^3$ من نفس إشارة $(x-1)$ ، إذن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $\frac{-P(-x)}{(x-1)}$

* لدراسة إشارة $P(-x)$ حسب قيم x :

$P(-x) = 0$ تعني $-x = \alpha$ أي $x = -\alpha$.

$P(-x) > 0$ تعني $-x > \alpha$ أي $x < -\alpha$.

$P(-x) < 0$ تعني $-x < \alpha$ أي $x > -\alpha$.

إذن:

x	$-\infty$		$-\alpha$		1		$+\infty$
$P(-x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

إشارة $\frac{P(-x)}{x-1}$ من إشارة $-\frac{P(-x)}{(x-1)}$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty,-\alpha]$ و $[1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[-\alpha;1]$.

* جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$-\alpha$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$		↗	$f(-\alpha)$	↘	$\|$	↗	

3) بما أن الدالة f' تنعدم من أجل القيمة $-\alpha$ وتغير إشارتها بجوارها فإن $f(-\alpha)$ قيمة حدية محلية للدالة f.

4) أ) التحقق أن: $f(x)=x+\dfrac{-2x+1}{2(x-1)^2}$

لدينا: $x+\dfrac{-2x+1}{2(x-1)^2}=\dfrac{2(x-1)^2x-2x+1}{2(x-1)^2}$

$=\dfrac{2(x^2-2x+1)x-2x+1}{2(x-1)^2}$

$=\dfrac{2x^3-4x^2+1}{2(x-1)^2}=f(x)$

إذن: $f(x)=x+\dfrac{-2x+1}{2(x-1)^2}$.

ب) دراسة الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ):

ندرس إشارة الفرق $[f(x)-y]$:

لدينا: $f(x)-y=f(x)-x=\dfrac{-2x+1}{2(x-1)^2}$

بما أنه من أجل كل x من D_f: $2(x-1)^2>0$ فإن إشارة الفرق $[f(x)-y]$ من نفس إشارة $(-2x+1)$.

ومنه:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$		(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)	

5) تبيان أن (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي (Δ) يطلب تعيين معادلة له:

نحل في D_f المعادلة: $f'(x)=1$.

$f'(x)=1$ معناه $-\dfrac{P(-x)}{(x-1)^3}=1$ معناه $\dfrac{x^3-3x^2+4x-1}{(x-1)^3}=1$

معناه: $\dfrac{x^3-3x^2+4x-1-(x^3-3x^2+3x-1)}{(x-1)^3}=0$ معناه $\dfrac{x}{(x-1)^3}=0$ معناه $x=0$

إذن (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=0$ و يوازي (Δ).

تعيين معادلة (T): لدينا: $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

إذن $y=f'(0)(x-0)+f(0)$

$=1x+\frac{1}{2}$

وبالتالي: $y=x+\frac{1}{2}$.

16 أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f ولدينا من أجل كل x من D_f:

$$f''(x)=\frac{(3x^2-6x+4)(x-1)^3-3(x-1)^2(x^3-3x^2+4x-1)}{(x-1)^6}$$

$$=\frac{(3x^2-6x+4)(x-1)-3(x^3-3x^2+4x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{3x^3-9x^2+10x-4-3x^3+9x^2-12x+3}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{-2x-1}{(x-1)^4}.$$

ب) دراسة إشارة $f''(x)$:

لدينا من أجل كل x من D_f: $(x-1)^4>0$

إذن إشارة $f''(x)$ من نفس إشارة البسط $-2x-1$:

ومنه:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	
f		∪	نقطة انعطاف	∩	$\|$	∩	

بما أن $f''(x)$ تنعدم من أجل القيمة $-\frac{1}{2}$ وتغير إشارتها بجوارها فإن النقطة $B(-\frac{1}{2};f(-\frac{1}{2}))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f).

7) تعيين قيمة مقربة لـ $f\left(-\frac{2025}{2026}\right)$:

لدينا: $f\left(-\frac{2025}{2026}\right)=f\left(-1+\frac{1}{2026}\right)$

إذن: $f\left(-\frac{2025}{2025}\right)\approx f'(-1)\left(\frac{1}{2026}\right)+f(-1)$

$\approx \frac{9}{8}\times\frac{1}{2026}-\frac{5}{8}$

$\approx \frac{9-5\times2026}{16208}$

$\approx -\frac{10121}{16208}$

$\approx -0,6244$.