الفرض المحروس رقم –01– للفصل الأول في مادة الرياضيات

القسم: 02 علمي المدة: ساعة ونصف

التمرين الأول:

نعتبر كثير الحدود $\mathbf{P}$ المعرف من أجل كل عدد حقيقي x كما يلي : $\mathbf{P}(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$.

1. أحسب $\mathbf{P}(-2)$ ، ماذا تستنتج ؟
2. أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $\mathbf{P}(x) = (x+2)\mathbf{Q}(x)$. حيث $\mathbf{Q}(x)$ كثير حدود يُطلب تعيينه.

   ب) استنتج تحليلاً لـ $\mathbf{P}(x)$ على شكل جداء كثيرات حدود من الدرجة الأولى.
3. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\mathbf{P}(x) \geqslant 0$.

التمرين الثاني:

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^2 - 3x + 1$ وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.
2. بين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - f\left(\frac{3}{2}\right) \geq 0$ ، ثم استنتج أصغر قيمة ممكنة للدالة f .
3. أدرس إتجاه تغير الدالة f على المجالين : $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$ و $\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.
4. إشرح كيف يمكن استنتاج $(\mathscr{C}_f)$ التمثيل البياني للدالة f إنطلاقاً من التمثيل البياني للدالة "مربع" $(k(x) = x^2)$ ، ثم أرسم $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_k)$ في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.
5. بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{3}{2}$ محور تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$. .
6. g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = |f(x)|$.

   I) أكتب $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة .

   II) استنتج اتجاه تغير الدالة g.

   III) باستعمال الفرع "I" حدد كيف يتم رسم $(\mathscr{C}_g)$ ثم أرسمه .
7. نضع من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x) = f(|x|)$.

   • أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x موجب : $h(x) = f(x)$.

   • أثبت أن الدالة h دالة زوجية .

   • أرسم $(\mathscr{C}_h)$ منحني الدالة h باستعمال $(\mathscr{C}_f)$ منحني الدالة f.

بالتوفيـــــق

تصحيح الفرض الأول للفصل الأول مادة الرياضيات

التمريـــــن (1)

لدينا : $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$.

1) **حساب $P(-2)$:**

$$P(-2) = 2(-2)^3 - (-2)^2 - 13(-2) - 6$$
$$= 2 \times (-8) - 4 + 26 - 6 = -16 - 4 - 6 + 26 = 0 \quad \textbf{(0.5 pt)}$$

ومنه $P(-2) = 0$ **(0.5 pt)**

2)

ا) **نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $P(x) = (x+2)Q(x)$:**

بما أنّ $P(x)$ كثير حدود من الدرجة الثالثة و -2 جذر له فإنه يكتب على الشكل : $P(x) = (x+2)Q(x)$ **(0.5 pt)**

تعيين $Q(x)$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - x^2 - 13x - 6 & x+2 \\ \hline -2x^3 - 4x^2 & 2x^2 - 5x - 3 \\ \hline -5x^2 - 13x & \\ 5x^2 + 10x & \\ \hline -3x - 6 & \\ 3x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ومنه : $Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$ **(1 pt)**

ب) **استنتاج تحليل لـ $P(x)$ على شكل جداء كثيرات حدود من الدرجة الأولى:**

لدينا $P(x) = (x+2)Q(x)$

نحل المعادلة $Q(x) = 0$:

$$Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$$
$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3)$$
$$= 25 + 25 = 49 > 0$$

$$x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$$

إذن :

$$Q(x) = 2(x+\tfrac{1}{2})(x-3)$$

ومنه

$$P(x) = 2(x+2)(x+\frac{1}{2})(x-3) \quad \textbf{(1 pt)}$$

3) **حل المتراجحة $P(x) \geqslant 0$ في $\mathbb{R}$:** **(1.5 pt)**

x	$-\infty$		-2		$\frac{-1}{2}$		3		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$Q(x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

وبالتالي حلول المتراجحة $P(x) \geqslant 0$ في $\mathbb{R}$ هي $x \in \left[-2; \frac{-1}{2}\right] \cup [3; +\infty[$

التمريـــــن (2)

$D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$

1) **نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f(x) = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$:**

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = x^2 + \frac{9}{4} - 3x - \frac{5}{4} \quad \textbf{(1 pt)}$$
$$= x^2 - 3x + 1 = f(x)$$

2) **نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $f(x) - f(\frac{3}{2}) \geq 0$:**

لدينا : $f(\frac{3}{2}) = -\frac{5}{4}$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right) \geq 0 \Rightarrow \underbrace{\left(x - \frac{3}{2}\right) - \frac{5}{4}}_{f(x)} + \frac{5}{4} \geq 0$$

$$f(x) - \left(-\frac{5}{4}\right) \geq 0$$

ومنه $\boxed{f(x) - f(\frac{3}{2}) \geq 0}$ **(1 pt)**

$f(x) \geq f(\frac{3}{2})$ معناه أنّ $f(\frac{3}{2})$ قيمة حدية صغرى للدالة f **(0.5 pt)**

3) **دراسة اتجاه تغير الدالة f :**

$x \xrightarrow{U} x - \frac{3}{2} \xrightarrow{V} (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$

تفكك الدالة f إلى دالتين U و V بحيث : $f = V \circ U$.

- لما $x \in]-\infty; \frac{3}{2}]$ فإن :

$$\begin{cases} U(x) = x - \frac{3}{2} & D_U =]-\infty; \frac{3}{2}] \\ V(x) = x^2 - \frac{5}{4} & D_V =]-\infty; 0] \end{cases}$$

U متزايدة تماما على $]-\infty; \frac{3}{2}]$ ، V متناقصة تماما على $]-\infty; 0]$

ومنه الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \frac{3}{2}]$ **(1 pt)**

- لما $x \in [\frac{3}{2}; +\infty[$ فإن :

$$\begin{cases} U(x) = x - \frac{3}{2} & D_U = [\frac{3}{2}; +\infty[\\ V(x) = x^2 - \frac{5}{4} & D_V = [0; +\infty[\end{cases}$$

U متزايدة تماما على $[\frac{3}{2}; +\infty[$ ، V متزايدة تماما على $[0; +\infty[$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[\frac{3}{2}; +\infty[$ **(1 pt)**

- جدول تغيرات الدالة f : **(0.5 pt)**

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	↘		↗

4) يمكن رسم $(\mathscr{C}_f)$ انطلاقا من $(\mathscr{C}_K)$ بواسطة انسحاب شعاعه :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{3}{2}\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j}}$$ **(1 pt)**

5) **نبين أن المستقيم ذو المعادلة $x = \frac{3}{2}$ هو محور تناظر لـ $(\mathscr{C}_f)$:**

$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + X \\ y = -\frac{5}{4} + Y \end{cases}$ ومنه $Y - \frac{5}{4} = (\frac{3}{2} + X - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$ إذن : $\boxed{Y = X^2}$ **(1 pt)**

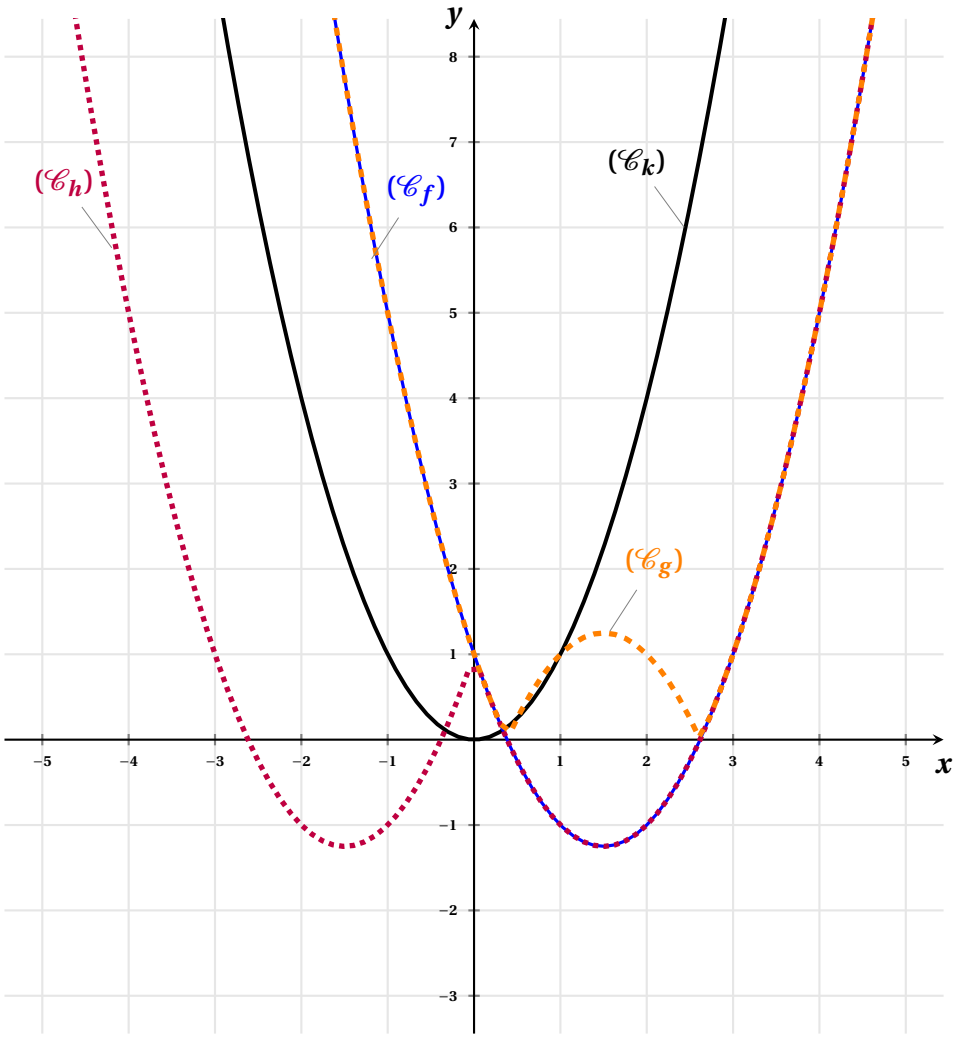
دالة زوجية تقبل محور تناظر

6)

- **كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :**

لدينا : $g(x) = |f(x)|$ ومنه

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; f(x) \leq 0 \end{cases}$$ **(1 pt)**



- **استنتاج اتجاه تغير الدالة g :** لما $f(x) \geq 0$ يكون للدالتين f و g نفس اتجاه التغير ، أما إذا كان $f(x) \leq 0$ فإن الدالتين f و g متعاكستان في اتجاه التغير **(1 pt)**

- **يتم رسم $(\mathscr{C}_g)$ انطلاقًا من $(\mathscr{C}_f)$ كما يلي :** **(1 pt)**

- لما $f(x) \geq 0$ فإن $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ متطابقان.
- لما $f(x) \leq 0$ نرسم نظير $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة لمحور الفواصل فنتحصل على $(\mathscr{C}_g)$

7

- **اثبات أنه من أجل كل $x \geq 0$: $h(x) = f(x)$** **(1 pt)**

$h(x) = f(|x|)$ ، بما أن $x \geq 0$ فإن : $|x| = x$ أي

$$h(x) = f(x)$$

- **اثبات أن الدالة h زوجية :**

$\mathbb{R}$ متناظر ، نثبت أن $h(-x) = h(x)$. **(0.5 pt)**

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

- **يتم رسم $(\mathscr{C}_h)$ باستعمال $(\mathscr{C}_f)$ كالآتي:**
  - إذا كان $x \geq 0$ فإن $(\mathscr{C}_h)$ و $(\mathscr{C}_f)$ متطابقان.
  - إذا كان $x \leq 0$ نرسم نظير $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى محور التراتيب . **(1 pt)**

8 **التمثيل البياني للدوال السابقة :** **(2 pt)**