

الفرص الأول للفصل الثالث في الرياضيات

المدة: ⌚ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 3n}{2n^2 + 2019}$ ساعة

المستوى: 02 رياضيات

مجموعة محوطة الرياضيات للتعليم بالجزائر

التمرين الأول:

تكن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 وأساسها $q = 3$ حيث : $u_1 \times 2u_2 \times u_3 = 432$

1. تأكد أن $6^3 = 216$ ثم أحسب u_2 ، إستنتج قيمة u_1

2. أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة u_1

3. أحسب $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ $T_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

4. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم كمايلي :

$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n \end{cases}$$

• أحسب v_2 ، v_3 ، v_4

5. نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

• بين أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول w_1

• أكتب w_n بدلالة n ثم إستنتج v_n بدلالة n

التمرين الثاني:

نعتبر $(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي

تكن (C) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي بحيث : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 13 - \alpha^2 = 0$ مع $(\alpha \in \mathbb{R})$

• أدرس حسب قيم α مجموعة النقط (C)

• نضع $\alpha = 4$

1. عين مركز Ω ونصف قطر للدائرة (C)

2. أدرس وضعية المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 7$ بالنسبة للدائرة (C)

3. عين إحداثيي النقطة B المسقط العمودي للنقطة Ω على المستقيم (Δ)

4. تحقق أن $d(\Omega; (\Delta)) = \Omega B$

5. أكتب معادلة المماس (T) للدائرة (C) عند النقطة $A(-1; 4)$

الهدية : أوجد معادلة الدائرة تمر بالنقطتين $A(0, 2)$ و $B(-1, 0)$ و المستقيم ذو المعادلة $x + y - 7 = 0$ مماس لها .

تصحيح الفرض الأول للفصل الثالث في مادة الرياضيات

حل التمرين 1

لنكن (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_1 وأساسها $q = 3$ حيث : $u_1 \times 2u_2 \times u_3 = 432$

1 • حساب u_2

لدينا : $u_1 \times 2u_2 \times u_3 = 432$ تكافئ $u_1 \times u_2 \times u_3 = 216$ تكافئ $u_2^3 = 216$ ومنه $u_2 = 6$

• حساب u_1 : $u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{3} = 2$

2 • كتابة عبارة حد العام لـ u_n : $u_n = u_p \times q^{n-p} = u_1 \times q^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$

3 • حساب المجموع S_n والجداء T_n

حساب S_n : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{1 - 3^{n-1+1}}{1 - 3} = 2 \times \frac{1 - 3^n}{-2} = 3^n - 1$ تكافئ $S_n = 3^n - 1$

حساب T_n : $T_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n = (u_1) \times (u_1 \times q) \times (u_1 \times q^2) \times \dots \times (u_1 \times q^{n-1})$

تكافئ $T_n = \underbrace{(u_1 \times u_1 \times \dots \times u_1)}_{n \text{ مرة}} \times (q \times q^2 \times \dots \times q^{n-1})$

تكافئ $T_n = u_1^n \times q^{1+2+\dots+n-1}$ تكافئ $T_n = u_1^n \times q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

4 • (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم كيلي : $\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n \end{cases}$

• حساب v_2 ، v_3 ، v_4

$$\bullet v_4 = \frac{3}{2}v_3 + u_3 = \frac{3}{2} \times \frac{27}{2} + 18 = \frac{153}{4}$$

$$\bullet v_3 = \frac{3}{2}v_2 + u_2 = \frac{3}{2} \times 5 + 6 = \frac{27}{2}$$

$$\bullet v_2 = \frac{3}{2}v_1 + u_1 = \frac{3}{2} \times 2 + 2 = 5$$

5 • نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

• تبيان أن (w_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول w_1

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{2}{3} \text{ تكافئ } w_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3 \times u_n} - \frac{2}{3} \text{ تكافئ } w_{n+1} = \frac{\frac{3}{2}v_n + u_n}{3 \times u_n} - \frac{2}{3} \text{ تكافئ } w_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \right)$$

$$w_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \right) \text{ ومنه } w_n \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{1}{2} \text{ وحدها الأول } w_1 = \frac{v_1}{u_1} - \frac{2}{3} = \frac{2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

• كتابة w_n بدلالة n

$$w_n = w_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

• إستنتاج v_n بدلالة n

$$v_n = w_n \times u_n + \frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) (2 \times 3^{n-1}) + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \left(\left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} + 1 \right)$$

نعتبر $(O; \vec{i}, \vec{j})$ معلم متعامد و متجانس للمستوي

لتكن (C) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوي بحيث : $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 13 - \alpha^2 = 0$ مع $(\alpha \in \mathbb{R})$

• دراسة حسب قيم α مجموعة النقط (C)

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 13 - \alpha^2 = 0 \text{ تكافئ } (x-1)^2 + (y-2)^2 = \alpha^2 - 8$$

جدول إشارة $\alpha^2 - 8$

α	$-\infty$	$-\sqrt{8}$	$\sqrt{8}$	$+\infty$
$\alpha^2 - 8$	+	0	-	+

• من أجل $\alpha = \{-\sqrt{8}, \sqrt{8}\}$ مجموعة النقط (C) هي النقطة $\Omega(1; 2)$

• من أجل $\alpha \in]-\infty; -\sqrt{8}[\cup]\sqrt{8}; +\infty[$ مجموعة النقط (C) هي الدائرة التي مركزها $\Omega(1; 2)$ ونصف قطرها $r = \sqrt{\alpha^2 - 8}$

• من أجل $\alpha \in]-\sqrt{8}; \sqrt{8}[$ مجموعة النقط (C) هي مجموع خالية

نضع $\alpha = 4$

$$(C) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{8}$$

1 (C) هي الدائرة التي مركزها $\Omega(1; 2)$ ونصف قطرها $r = \sqrt{4^2 - 8} = \sqrt{8}$

2 دراسة وضعية المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 7$ بالنسبة للدائرة (C)

$$d(\Omega, \Delta) = \frac{|1+2-7|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{8} = r$$

3 تعيين إحداثي النقطة $B(x_B, y_B)$ المسقط العمودي للنقطة Ω على المستقيم (Δ)

$$x_B + y_B - 7 = 0 \text{ ومنه } (\Delta)$$

$$\vec{\Omega B} \cdot \vec{u} = 0 \text{ حيث } \vec{u}(1, -1) \text{ شعاع توجيه لـ } (\Delta), \text{ إذن } (x_B - 1) - (y_B - 2) = 0$$

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} x_B + y_B - 7 = 0 \\ x_B - y_B + 1 = 0 \end{cases} \text{ نجد } x = 3 \text{ و } y = 4 \text{ ومنه } B(3, 4)$$

$$4 \text{ التحقق أن } d(\Omega; (\Delta)) = \Omega B : d(\Omega; (\Delta)) = \Omega B = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = d(\Omega; (\Delta))$$

5 كتابة معادلة المماس (T) للدائرة (C) عند النقطة $A(-1; 4)$

$$\text{معادلة مماس } (T) \text{ من شكل } ax + by + c = 0 \text{ حيث } \vec{\Omega A}(-2, 2) \text{ شعاع ناظمي له إذن : } (T) : -2x + 2y + c = 0$$

$$\text{ونعلم أن } A \in (T) \text{ إذن } 2 + 8 + c = 0 \text{ ومنه } c = -10, \text{ إذن } (T) : -2x + 2y - 10 = 0$$

إيجاد معادلة الدائرة تمر بالنقطتين $A(0,2)$ و $E(-1,0)$ والمستقيم ذو المعادلة $x+y-7=0$ مماس لها .

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 4y_0 + 4 = r^2 & (1) \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 + 1 = r^2 & (2) \\ \frac{|x_0 + y_0 - 7|}{\sqrt{2}} = r \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} (x_0 - 0)^2 + (y_0 - 2)^2 = r^2 \\ (x_0 + 1)^2 + (y_0 - 0)^2 = r^2 \\ \frac{|x_0 + y_0 - 7|}{\sqrt{2}} = r \end{cases}$$

ليكن $E(x_0, y_0)$ مركز الدائرة ومنه

$$(2) - (1) \quad \text{تكافئ} \quad 2x_0 + 4y_0 - 3 = 0 \quad \text{تكافئ} \quad x_0 = -2y_0 + \frac{3}{2}$$

$$\text{بتعويض } x_0 = -2y_0 + \frac{3}{2} \text{ في (1) نجد} \quad \frac{|x_0 + y_0 - 7|}{\sqrt{2}} = r \quad \text{و} \quad x_0 = -2y_0 + \frac{3}{2}$$

$$\text{تكافئ:} \quad 10y_0^2 - 20y_0 + \frac{25}{2} = y_0^2 + 11y_0 + \frac{121}{4} \quad \text{تكافئ:} \quad 4y_0^2 + \frac{9}{4} - 6y_0 + y_0^2 - 4y_0 + 4 = \left(\frac{11}{2} + y_0\right)^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 40 \quad \Delta = 31^2 - 4 \times \frac{-71}{4} \times 9 = 1600 > 0 \quad \text{تكافئ:} \quad 9y_0^2 - 31y_0 - \frac{71}{4} = 0 \quad \text{تكافئ:}$$

$$\left(x + \frac{115}{18}\right)^2 + \left(y - \frac{71}{18}\right)^2 = \left(\frac{170}{18\sqrt{2}}\right)^2 \quad r_1 = \frac{\left|\frac{71}{18} - \frac{115}{18} - 7\right|}{\sqrt{2}} = \frac{170}{18\sqrt{2}}, \quad x_0 = -\frac{71}{9} + \frac{3}{2} = \frac{-115}{18}, \quad y_0 = \frac{31 + 40}{18} = \frac{71}{18}.$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2} \quad r_2 = \frac{\left|\frac{5}{2} - \frac{1}{2} - 7\right|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}, \quad x_0 = \frac{5}{2}, \quad y_0 = \frac{31 - 40}{18} = -\frac{1}{2}.$$

