ثانوية: الرواد الخاصة 'بوفاريك'
المستوى: السنة الأولى ج م تك

السنة الدراسية: 2025/2024
المدة: ساعتين

الفرض الأول للفصل الأول في الرياضيات

التمرين الأول :

I. بسط كل من الأعداد التالية ثم عين أصغر مجموعة تنتمي إليها كل عدد :

$$a=\frac{\pi^2\times(3,14)}{\pi\times(3,14)^2} \quad ، \quad b=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}} \quad ، \quad c=\frac{2}{\sqrt{2}+1}-2\sqrt{2} \quad ، \quad d=\frac{(-12)^{16}\times(75)^{-4}\times(-4)^{-9}}{\left[(25)^{-2}\right]^4\times(10)^4\times(18)^6}$$

II. بين أن الأعداد التالية طبيعية :

$$A=\frac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}} \quad ، \quad B=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{ab} \quad ، \quad C=\frac{3^{10}}{243} \quad ، \quad D=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-2\sqrt{2} \;.$$

III. α و β أعداد حقيقية حيث : $\alpha=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ و $\beta=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

1. احسب $\left(\sqrt{5}-1\right)^2$ ثم استنتج كتابة مبسطة للعدد α
2. احسب β^2 ثم استنتج كتابة مبسطة للعدد β ثم قارن بين α و β

التمرين الثاني :

A و B عددان طبيعيان حيث : $A=6300$ و $B=2700$

1. حلل العددين الطبيعيين A و B إلى جداء عوامل أولية . عين كل من $PGCD(A;B)$ و $PPCM(A;B)$
2. استنتج كل من : $PPCM\left(A^4;B^2\right)$ و $PPCM\left(A;B^2\right)$
3. اختزل الكسر $\frac{A}{B}$ ثم احسب الكسر $\frac{2}{6300}+\frac{5}{2700}$
4. عين أصغر عدد طبيعي m بحيث يكون العدد $\sqrt{A\times B\times m}$ عددا طبيعيا
5. إذا علمت أن : $2,6<\sqrt{7}<2,7$ و $1,7<\sqrt{3}<1,8$ جد حصرا لكل من : $\sqrt{A\times B}$ و $\sqrt{A}+\sqrt{B}$.

التمرين الثالث :

ليكن x و y عددان حقيقيان حيث : $3<x<8$ و $-7<y<-3$

1. عين حصرا لكل من : $x-y$ ، $1+y^2$ و $\frac{1}{1+y^2}$
2. استنتج حصرا لكل من : $\sqrt{\frac{x-y}{1+y^2}}$ و $(x-y)(1+y^2)$

التمرين الرابع :

n عدد طبيعي غير معدوم

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$
2. استنتج قيمة العدد S حيث : $S=\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{64\sqrt{63}+63\sqrt{64}}$

الفرض الأول المنزل الأول | سنة أولى ثانوي

التمرين الأول :

- $a = \dfrac{\pi^2 \times (3,14)}{\pi \times (3,14)^2} = \dfrac{\pi \times \pi \times (3,14)}{\pi \times (3,14) \times (3,14)} = \dfrac{\pi}{3,14}$ $(a \in IR)$

- $b = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{5+2}{10}}{\frac{5-2}{10}} = \dfrac{7}{10} \times \dfrac{10}{3} = \dfrac{7}{3}$ $(b \in \mathbb{Q})$

- $c = \dfrac{2}{\sqrt{2}+1} - 2\sqrt{2} = \dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} - 2\sqrt{2} = \dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{1} - 2\sqrt{2}$

$c = 2\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2} = -1$; $(c \in \mathbb{Z})$

- $d = \dfrac{(-12)^{16} \times (75)^{-4} \times (-4)^{-9}}{\left[(25)^{-2}\right]^4 \times (10)^4 \times (18)^6} = \dfrac{(12)^{16} \times \frac{1}{75^4} \times \frac{1}{(-4)^9}}{(25)^{-8} \times (10)^4 \times (18)^6}$

$d = \dfrac{(2^2 \times 3)^{16} \times \frac{1}{(3 \times 5^2)^4} \times \frac{-1}{(2^2)^9}}{\frac{1}{(5^2)^7} \times (2 \times 5)^4 \times (2 \times 3^2)^6} = \dfrac{\frac{2^{32} \times 3^{16}}{3^4 \times 5^8} \times \left(\frac{-1}{2^{18}}\right)}{\frac{2^4 \times 5^4 \times 2^6 \times 3^{12}}{5^{16}}}$

$d = \dfrac{\frac{-2^{14} \times 3^{12}}{5^8}}{\frac{2^{10} \times 3^{12}}{5^{12}}} = \dfrac{-2^{14} \times 3^{12}}{5^8} \times \dfrac{5^{12}}{2^{10} \times 3^{12}} = -2^{14-10} \times 5^{12-8}$

1 عبرة $d = -2^4 \times 5^4 = -(2 \times 5)^4 = -10000$

$(d \in \mathbb{Z})$

II

- $A = \dfrac{\sqrt{722}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{361 \times 2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{(19)^2 \times 2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{19\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 19$

ومنه $(A \in IN)$

- $B = \dfrac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab} = \dfrac{(a^2+b^2+2ab) - (a^2+b^2-2ab)}{ab}$

$B = \dfrac{a^2+b^2+2ab-a^2-b^2+2ab}{ab} = \dfrac{4ab}{ab} = 4$

$(B \in IN)$

تحليل 243 إلى جداء عوامل أولية:

$$\begin{array}{r|l} 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$243 = 3^5$

- $C = \dfrac{3^{10}}{243} = \dfrac{3^{10}}{3^5}$

$C = 3^{10-5} = 3^5 = 243$

ومنه $(C \in IN)$

الأستاذ: عبد القادر
insta: Prof_toutaoui_kader

- $D = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} - 2\sqrt{2}$

$D = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2})^2-1} - 2\sqrt{2} = \dfrac{3+2\sqrt{2}}{1} - 2\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$D = 3$; $(D \in IN)$

III

1) حساب $(\sqrt{5}-1)^2$:

$(\sqrt{5}-1)^2 = (\sqrt{5})^2 + 1^2 - 2\sqrt{5}$

$= 6 - 2\sqrt{5}$

تبسيط α:

- $\alpha = \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{5}-1$

$(\sqrt{5}-1 > 0$ لأن$)$

2) لمعرفة β^2

$\beta^2 = \left(\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2$

$= \left(\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2 + \left(\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right)^2 + 2\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \times \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

$\beta^2 = 4+\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 4 - \sqrt{10+2\sqrt{5}} + 2\sqrt{(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}})(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}})}$

$\beta^2 = 8 + 2\sqrt{(4)^2 - (\sqrt{10+2\sqrt{5}})^2} = 8+2\sqrt{16-10-2\sqrt{5}}$

$\beta^2 = 8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$\beta^2 = 8 + 2\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2} = 8 + 2\times(\sqrt{5}-1)$

$\beta^2 = 8 + 2\sqrt{5} - 2 = 6 + 2\sqrt{5}$

$\beta = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5}+1.$

• مقارنة بين α و β :

$\alpha = \sqrt{5}-1 \; ; \quad \beta = \sqrt{5}+1$

$\alpha - \beta = (\sqrt{5}-1) - (\sqrt{5}+1)$

$= \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5} - 1$

$\alpha - \beta = -2$

بما أن $-2 < 0$ ؛ فإن $\alpha - \beta < 0$ وعليه $\alpha < \beta$

صفحة 3

التمرين الثاني :

$A = 6300$ و $B = 2700$

6300	2
3150	2
1775	3
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

$A = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$

2700	2
1350	2
675	3
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

$B = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$

$PGCD(A;B) = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

$PGCD(A;B) = 900$

$PPCM(A;B) = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$

$PPCM(A;B) = 18\,900$

الأستاذ: عبد القادر
insta: Prof_toutaoui_kader

$B^2 = (2^2 \times 3^3 \times 5^2)^2 = 2^4 \times 3^6 \times 5^4$

$A^4 = (2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7)^4 = 2^8 \times 3^8 \times 5^8 \times 7^4$

$PPCM(A, B^2) = 2^4 \times 3^6 \times 5^4 \times 7 = 51\,030\,000$

$PPCM(A^4; B^2) = 2^8 \times 3^8 \times 5^8 \times 7^4 = 1\,575\,296\,100\,000\,000$

③ إختزال الكسر:

$$\frac{A}{B} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7}{2^2 \times 3^2 \times 3 \times 5^2} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{2}{6300} + \frac{5}{2700} = \frac{41}{18900}$$

④ تعيين أصغر عدد طبيعي m بحيث $\sqrt{A \times B \times m}$ عددا طبيعيا:

$$\sqrt{A} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7} = 2 \times 3 \times 5\sqrt{7} = 30\sqrt{7}$$

$$\sqrt{B} = \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 3 \times 5^2} = 5 \times 3 \times 2 \times \sqrt{3} = 30\sqrt{3}$$

$$\sqrt{A \times B \times m} = \sqrt{A} \times \sqrt{B} \times \sqrt{m} = 30\sqrt{7} \times 30\sqrt{3} \times \sqrt{m} = 900\sqrt{21} \times \sqrt{m}$$

ومنه $\boxed{m = 21}$

⑤ الحصر: حصر $\sqrt{A}$: لدينا: $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$ ومنه

$$30 \times 2,6 < 30\sqrt{7} < 30 \times 2,7$$

(1) ..... $\boxed{78 < \sqrt{A} < 81}$

حصر $\sqrt{B}$: لدينا $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$ ومنه

$$30 \times 1,7 < 30\sqrt{3} < 30 \times 1,8$$

(2) ..... $\boxed{51 < \sqrt{B} < 54}$

صفحة 4

حصر $\sqrt{A} \times \sqrt{B}$ من (1) و(2) نجد: $78 \times 51 < \sqrt{A} \times \sqrt{B} < 81 \times 54$

ومنه $\boxed{3978 < \sqrt{A} \times \sqrt{B} < 4374}$

حصر $\sqrt{A} + \sqrt{B}$: من (1) و(2) نستنتج: $78 + 51 < \sqrt{A} + \sqrt{B} < 81 + 54$

$$\boxed{129 < \sqrt{A} + \sqrt{B} < 135}$$

التمرين الثالث: $3 < x < 8$, $-7 < y < -3$

• حصر $x - y$: نكتب $x - y$ على الشكل $x + (-y)$

نقوم أولاً بإيجاد حصر للعدد $-y$ حيث $3 < -y < 7$

ولدينا $3 < x < 8$

الآن نجمع المتباينتين طرفا بطرف نجد: $\boxed{6 < x - y < 15}$

الأستاذ عبد القادر

حصر $1+y^2$: نقوم أولا بإيجاد حصر للعدد y^2 :

لدينا $-7 < y < -3$ ومنه $9 < y^2 < 49$ وعليه

$$\boxed{10 < 1+y^2 < 50}$$

حصر $\frac{1}{1+y^2}$: لدينا $10 < 1+y^2 < 50$ ومنه

$$\boxed{\frac{1}{50} < \frac{1}{1+y^2} < \frac{1}{10}}$$

$$\sqrt{\frac{x-y}{1+y^2}} = \sqrt{(x-y) \times \frac{1}{1+y^2}}$$

لدينا : $6 < x-y < 15$

و $\frac{1}{50} < \frac{1}{1+y^2} < \frac{1}{10}$

بالضرب طرف لطرف نجد: $\frac{6}{50} < \frac{x-y}{1+y^2} < \frac{15}{10}$

وعليه $\frac{3}{25} < \frac{x-y}{1+y^2} < \frac{3}{2}$ وعليه

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{5} < \sqrt{\frac{x-y}{1+y^2}} < \frac{\sqrt{6}}{2}}$$

حصر $(y-x)(1+y^2)$: لدينا $6 < x-y < 15$

وعليه $10 < 1+y^2 < 50$

$$\boxed{60 < (x-y)(1+y^2) < 750}$$

5 نقاط

التمرين الرابع : n عدد طبيعي غير معدوم

1) إثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{\left((n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}\right)\left((n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}\right)}$$

$$= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 \times n - n^2(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n^2+2n+1) \times n - n^3 - n^2}$$

$$= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n^3 + 2n^2 + n - n^3 - n^2} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n^2+n}$$

$$= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{(n+1)\sqrt{n}}{n(n+1)} - \frac{n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\times\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\times\sqrt{n+1}}$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

② قيمة العدد :

$$S = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \cdots\cdots + \frac{1}{64\sqrt{63}+63\sqrt{64}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots\cdots + \frac{1}{\sqrt{63}} - \frac{1}{\sqrt{64}}$$

$$S = 1 - \frac{1}{\sqrt{64}} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{8}{8} - \frac{1}{8}$$

صفحة 6

$$S = \frac{7}{8}$$

الأستاذ: عبد القادر

insta: Prof_toutaoui_Kader